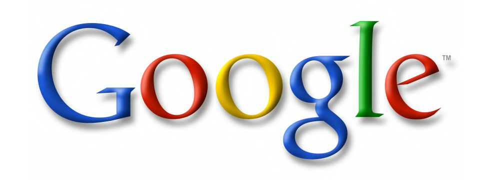




GENERAL LIBRARY
UNIVERSITY OF MICHIGAN
ARTES · SCIENTIA · VERITAS
1817

РАЦІОНАЛЬНАЯ МЕХАНИКА

СОСТАВИЛЪ

І. СОМОВЪ,

АКАДЕМИКЪ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ И ЗАСЛУЖЕННЫЙ ПРОФЕССОРЪ
ИМПЕРАТОРСКАГО С.-ПЕТЕРБУРГСКАГО УНИВЕРСИТЕТА.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ВВЕДЕНІЕ ВЪ СТАТИКУ И ДИНАМИКУ И СТАТИКА.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
(Вас. остр. 9 лин., № 12.)
1877.

ПРЕДИСЛОВІЕ

КО ВТОРОМУ ВЫПУСКУ.

Настоящій выпускъ механики академика I. Сомова изданъ послѣ смерти автора, по рукописи оставленной покойнымъ. Издатель считаетъ своимъ долгомъ заявить, что при печатаніи выпуска не было сдѣлано никакихъ измѣненій въ рукописи, кромѣ поправокъ нѣсколькихъ выраженій въ текстѣ и въ формулахъ, содержавшихъ просто описки или не вполнѣ обработанныхъ для печати. Но за исключеніемъ этихъ немногихъ поправокъ вся рукопись была вполнѣ приготовлена къ печати самимъ авторомъ.

Издатель считаетъ долгомъ выразить свою признательность Совѣту С.-Петербургскаго Университета, оказавшему денежное пособіе при изданіи и назначившему профессора Е. И. Золотарева, наблюдать за печатаніемъ. Послѣдній принялъ на себя трудъ просматривать послѣднюю корректуру каждаго листа.

ГЛАВА III.

Работа силы и системы силъ. Векторъ и вращательный моментъ силы. Главный векторъ и главный моментъ системы силъ. Условія, необходимыя для равновѣсія всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на какую либо систему матерьяльныхъ точекъ. Условія, достаточныя для равновѣсія всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему точекъ. Наименьшій главный моментъ и центральная ось системы силъ.

54. Кромѣ условныхъ величинъ, указанныхъ въ главѣ I, какъ служащихъ къ опредѣленію силы и способа ея измѣренія, въ механикѣ разсматривается условная величина, называемая *работою силы*, принятая для оцѣнки дѣйствія силы, производящей движеніе.

Если постоянная сила $\overline{F}$ заставляетъ покоившуюся точку пройти безпрепятственно прямолинейное пространство s, то произведеніе $\overline{Fs}$ разсматривается какъ мѣра дѣйствія силы въ продолженіе движенія ея точки приложенія и называется работою силы F относительно пространства s.

Если тѣло, имѣющее вѣсъ $\overline{F}$, спустилось съ вертикальной высоты h, то Fh есть работа вѣса относительно высоты h. За единицу всякой работы взята работа единицы вѣса, спустившаго тѣло на единицу высоты. Если единица вѣса есть килограмъ, а единица высоты метръ, то единица работы есть *килограмметръ*.

Когда постоянная сила $\overline{F}$ вмѣстѣ съ другою постоянною силою $\overline{F'}$ заставляетъ общую, покоившуюся, точку приложенія пройти прямолинейное пространство $\overline{s}$ то онѣ, производятъ работу, равную работѣ ихъ равнодѣйству ющей $\overline{R}=\overline{F}+\overline{F'}$, а именно: Rs; но $R=F\cos(Fs)+F'\cos(F's)$; слѣд.

$$Rs = F \cos (Fs) . s + F' \cos (F's) . s \ldots\ldots\ldots (1)$$

Это показываетъ, что работа двухъ силъ $\overline{F}$ и $\overline{F'}$ равна алгебраической суммѣ работъ силъ: $\pm F \cos (Fs)$ и $\pm F' \cos (F's)$, равныхъ ихъ проэкціямъ на пространствѣ s. Каждый членъ этой суммы разсматривается какъ работа соотвѣтственной слагаемой силы; поэтому геометрическое произведеніе $F \cos (Fs)s = \overline{Fs}$ разсматривается какъ работа силы $\overline{F}$. Отсюда вытекаетъ общее опредѣленіе работы постоянной силы относительно какого либо прямолинейнаго пространства, которое она можетъ заставить пройти точку приложенія, дѣйствуя на нее вмѣстѣ съ другими силами:

Работа постоянной силы относительно прямолинейнаго пространства есть геометрическое произведеніе этихъ двухъ величинъ.

Работа равна нулю, когда сила перпендикулярна къ пространству, и — отрицательная, когда сила составляетъ съ пространствомъ уголъ болѣе 90°.

55. Такое опредѣленіе работы распространяется на силы перемѣнныя относительно безконечно-малыхъ пространствъ. Пусть будетъ $\overline{F}$ значеніе перемѣнной силы во время t, а $\overline{\varepsilon}$ безконечно-малое элементарное пространство, проходимое точкою приложенія въ слѣдующее безконечно-малое время τ, опредѣляемое скоростью или однимъ изъ ускореній; геометрическое произведеніе $\overline{F\varepsilon}$ называется элементарною работою силы $\overline{F}$ относительно перемѣщенія $\overline{\varepsilon}$.

Если $\overline{s}$ есть прямолинейное пространство пройденное точкою приложенія силы $\overline{F}$, дѣйствующей отдѣльно или съ другими силами, и $\overline{v}$, $\overline{v}_1$, v_2, ... скорость и ускоренія, пріобрѣтенныя во время t, то для $\overline{\varepsilon}$ берутъ пространство $v\tau$ по направленію скорости, если скорость $\overline{v}$ неравна нулю. Если же $v = 0$ и $\overline{v_n}$ есть первое изъ ускореній, необращающихся въ нуль, то берутъ безконечно малую длину порядка $n + 1$:

$$\frac{1}{1.2.3..(n+1)} v_n \tau^{n+1},$$

отложенную по направленію ускоренія порядка n: $\overline{v_n}$.

Когда скорость v неравна нулю, то $\varepsilon = v\tau = ds$ и эта элементарная работа выражается произведеніемъ

$$\overline{Fds} = \overline{Fv} . dt,$$

что представляетъ нѣкоторую дифференціальную функцію времени.

Интегралъ такой функціи, взятый отъ 0 до t:

$$\int_0^t \overline{Fv} . dt, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

называется работою силы F во время t или работою силы относительно пространства $s = \int_0^t vdt$.

56. *Элементарная работа силы, имѣющей потенціалъ, равна дифференціалу потенціала относительно перемѣщенія.*

Если φ есть потенціалъ силы $\overline{F}$, то $\frac{d\varphi}{ds} = F \cos(F, ds)$ есть производная потенціала φ относительно перемѣщенія ds; слѣд.

$$d\varphi = F \cos(F, ds) . ds = \overline{Fds}$$

есть элементарная работа силы $\overline{F}$ относительно перемѣщенія ds.

Означая чрезъ φ_0 начальное значеніе потенціала, т. е. при $s=0$, мы будемъ имѣть выраженіе

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^s \overline{Fds}$$

для работы силы относительно пространства s, т. е. *работа силы, имѣющей потенціалъ, равна приращенію, которое получаетъ потенціалъ силы, при переходѣ отъ начальнаго значенія къ значенію, соотвѣтствующему концу пути, пройденнаго точкою приложенія силы.*

Чрезъ начало пространства s проходитъ поверхность уровня (φ_0), а чрезъ конецъ поверхность уровня (φ). Замѣнивъ пространство s другимъ s', начинающимся па поверхности (φ_0) и кончающимся на

поверхности (φ), но находящимся на какой либо другой траекторіи точки приложенія силы, будемъ имѣть опять ту же величину работы

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^{s'} Fds;$$

слѣд. *работа силы, имъющей потенціалъ, не зависитъ, ни отъ вида траекторіи точки приложенія силы, ни отъ мѣста начала и конца пройденнаго пространства на поверхностяхъ уровня, между которыми заключается это пространство.*

Если сила $\overline{F}$, приложенная къ точкѣ M, есть сила притяженія однороднымъ шаромъ массы m по закону Ньютона, т. е. обратно-пропорціонально квадратамъ разстояній, то $\varphi = \frac{m}{r}$, гдѣ r есть разстояніе точки M отъ центра шара; слѣд.

$$\overline{Fds} = d\left(\frac{m}{r}\right) = -\frac{mdr}{r^2}$$

есть выраженіе элементарной работы, а

$$\int_0^s \overline{Fds} = \frac{m}{r} - \frac{m}{r_0},$$

гдѣ r_0 есть первоначальное значеніе r_0, представляетъ конечную работы силы F въ какомъ нибудь движеніи точки M при переходѣ отъ какой нибудь точки поверхности шара радіуса (r_0), концентрическаго съ m въ какую-либо точку поверхности концентрическаго шара радіуса r.

Всякую силу $\overline{F}$ можно разсматривать какъ притягивающую ея точку приложенія M къ нѣкоторой неподвижной точкѣ O, взятой на прямой, по которой направлена сила съ той стороны, куда сила направлена. Означая разстояніе OM чрезъ r и разсматривая эту величину какъ перемѣнную, а F какъ постоянную, можно принять моментально выраженіе $-\overline{Fr}$ за потенціалъ силы F, потому что послѣдняя равна по величинѣ и направленію дифференціальному параметру этой функціи въ точкѣ M.

Элементарная работа $\overline{Fds}$ выразится дифференціаломъ $-Fdr$. Этотъ дифференціалъ, взятый съ противоположнымъ знакомъ, т. е. Fdr названъ Лагранжемъ *моментомъ* силы*). Здѣсь—dr есть проэкція на силѣ $\overline{F}$ безконечно-малаго перемѣщенія $\overline{\varepsilon}$ ея точки приложенія.

Когда скорость $\overline{v}$ и ускоренія $\overline{v_1}, \overline{v_2} \ldots \overline{v_{n-1}}$ равны нулю и для $\overline{\varepsilon}$ взято (какъ было сказано выше) элементарное пространство $\frac{1}{1.2..(n+1)}\overline{v_n}\,\tau^{n+1}$, при безконечно-маломъ τ, то элементарная работа будетъ безконечно-малая величина порядка $n+1$, а именно:

$$\overline{F\varepsilon} = \frac{\tau^{n+1}}{1.2.3..(n+1)}\,\overline{Fv_n}.$$

Когда сила $\overline{F}$ имѣетъ потенціалъ, тогда

$$\overline{Fv_n} = \frac{d^{n+1}\varphi}{dt^{n+1}} \text{ (см. Кин. § 112)}$$

и слѣд.

$$\overline{F\varepsilon} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}\,d^{n+1}\varphi.$$

Въ вопросахъ Статики можно довольствоваться разсматриваніемъ элементарныхъ работъ, которыя для простоты выраженія будемъ пока называть просто работами силъ.

57. Если

$$\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \ldots;$$

то, по правилу геометрическаго умноженія, имѣемъ

$$\overline{F\varepsilon} = \overline{F_1\varepsilon} + \overline{F_2\varepsilon} + \ldots\ldots$$

т. е. *работа равнодѣйствующей равна суммѣ работъ всѣхъ слагаемыхъ силъ.*

Если же $\overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon_1} + \overline{\varepsilon_2} + \ldots\ldots$, то

$$\overline{F\varepsilon} = \overline{F\varepsilon_1} + \overline{F\varepsilon_2} + \ldots\ldots$$

---

*) Mécanique analytique, première partie, article 2.

Галилей назвалъ моментомъ силы произведеніе силы на скорость точки приложенія силы по направленію силы.

т. е. ***работа силы относительно сложнаго перемѣщенія равна суммѣ ея работъ относительно слагаемыхъ перемѣщеній.***

Положимъ напр., что X, Y, Z суть слагаемыя силы F, параллельныя тремъ осямъ Ox, Oy, Oz. По первому предложенію мы будемъ имѣть:

$$\overline{F\varepsilon} = \overline{X\varepsilon} + \overline{Y\varepsilon} + \overline{Z\varepsilon}.$$

Означая чрезъ x, y, z координаты точки приложенія силы $\overline{F}$ относительно осей Ox, Oy, Oz и взявъ для $\overline{\varepsilon}$ перемѣщеніе перваго порядка, мы будемъ имѣть

$$\overline{\varepsilon} = \overline{dx} + \overline{dy} + \overline{dz};$$

поэтому

$$\overline{F\varepsilon} = Xdx + Ydy + Zdz$$

$$+ (Ydz + Zdy)\cos(yz) + (Zdx + Xdz)\cos(xz) + (Xdy + Ydx)\cos(xy).$$

Въ случаѣ прямоугольныхъ осей Ox, Oy, Oz это выраженіе приводится къ трехчлену

$$\overline{F\varepsilon} = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Положимъ еще для примѣра, что точка M притягивается массою m такъ, что сила притяженія однимъ элементомъ dm есть $f(r)dm = \frac{dF(r)}{dr}dm$, гдѣ r есть разстояніе этого элемента отъ точки M. Полагая, что $\overline{\varepsilon}$ перваго порядка и что его проекція на $\overline{r}$ есть δr, мы будемъ имѣть выраженіе

$$-f(r)dm\delta r = \delta F(r)\,.\,dm$$

для работы притяженія однимъ элементомъ массы. Интегралъ этого выраженія, распространенный на цѣлую массу m

$$\int \delta F(r)\,.\,dm$$

выразитъ работу равнодѣйствующей всѣхъ элементарныхъ притяженій. Знакъ дифференцированія δ можно вывести за знакъ $\int$; отъ чего получимъ

$$\delta\int F(r)dm.$$

Здѣсь $\int F(r)dm$ есть потенціалъ равнодѣйствующей.

58. Пусть будетъ $\overline{F}, \overline{F'}, \overline{F''}, \ldots$ система силъ, приложенныхъ къ точкамъ $m, m', m'', \ldots$, а $\overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon'}, \overline{\varepsilon''}, \ldots$ безконечно-малыя одновременныя перемѣщенія этихъ точекъ. Сумма работъ всѣхъ силъ относительно перемѣщеній точекъ приложеній

$$\overline{F\varepsilon} + \overline{F'\varepsilon'} + \overline{F''\varepsilon''} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

называется *полною работою* системы силъ.

Когда силы $\overline{F}, \overline{F'}, \overline{F''}, \ldots$ суть дифференціальные параметры перваго порядка отъ одной функціи φ въ точкахъ $m, m', m'' \ldots$ (см. Кинем. § 115), а $\overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon'}, \overline{\varepsilon''}, \ldots$ перемѣщенія со скоростями $\overline{v}, \overline{v'}, \overline{v''}, \ldots$ въ безконечно-малое время dt, то

$$d\varphi = \Sigma\overline{Fv}.dt = \Sigma\overline{F\varepsilon}.$$

Функція φ называется потенціаломъ системы силъ $\overline{F}, \overline{F'}, \ldots$ Выведенная формула показываетъ, что *если система силъ имѣетъ потенціалъ, то полная работа силъ относительно безконечно-малыхъ дифференціальныхъ перемѣщеній перваго порядка равна дифференціалу потенціала.*

Для безконечно-малыхъ элементарныхъ перемѣщеній порядка $n+1$, зависящихъ только отъ ускореній порядка n, мы (также какъ и въ случаѣ одной точки) будемъ имѣть:

$$\Sigma\overline{F\varepsilon} = \frac{1}{1.2\ldots(n+1)}\, d^{n+1}\varphi$$

Пусть будутъ двѣ силы $\overline{F}$ и $\overline{F'}$, равныя и противоположныя, приложенныя къ двумъ точкамъ m и m' по прямой ихъ соединяющей. Мы будемъ имѣть

$$\overline{F\varepsilon} + \overline{F'\varepsilon'} = \overline{F(\overline{\varepsilon} - \overline{\varepsilon'})}.$$

Означая чрезъ $\overline{r}$ разстояніе между точками m и m', при началѣ въ m', мы будемъ имѣть въ случаѣ безконечно-малыхъ перемѣщеній перваго порядка

$$\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}' = \bar{r},$$

а слѣд.

$$\varepsilon \cos(\varepsilon r) - \varepsilon' \cos(\varepsilon' r) = dr$$

и

$$\overline{F\varepsilon} + \overline{F'\varepsilon'} = \pm F dr, \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

гдѣ должно взять знакъ $+$, когда силы $\bar{F}$ и $\bar{F'}$ увеличиваютъ разстояніе r и $-$, когда его уменьшаютъ.

Въ случаѣ перемѣщеній порядка $n+1$, будемъ имѣть

$$\overline{F\varepsilon} + \overline{F'\varepsilon'} = \pm \frac{F'}{1.2\ldots(n+1)} d^{n+1}r \ldots \ldots \ldots (5)$$

Пусть будетъ система матерьяльныхъ точекъ m, m', m'',... взаимно-притягивающихъ или отталкивающихъ по закону равенства дѣйствія и противодѣйствія. Означая чрезъ (mm') величину силы взаимнаго дѣйствія двухъ точекъ m и m' а чрезъ r разстояніе между этими точками, можно помощію формулы (5) выразить полную работу всѣхъ силъ взаимнаго дѣйствія между точками суммою

$$\Sigma \pm \frac{(mm')d^{n+1}r}{1.2\ldots(n+1)} \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

распространенною на всѣ точки, взятыя по парно.

Если всѣ силы (mm') суть функціи только разстояній и пропорціональны массамъ, т. е. имѣютъ видъ $mm'f(r)$, то полагая $f(r) = \frac{dF(r)}{dr}$, полную работу (6) можно представить подъ видомъ

$$\Sigma \pm mm' \frac{dF(r)}{dr} \cdot \frac{d^{n+1}r}{1.2\ldots(n+1)}.$$

Такъ какъ скорости и ускоренія до порядка $n-1$ въ перемѣщеніяхъ $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}'$,... равны нулю, то

$$dr = 0,\ d^2r = 0 \ldots d^n r = 0,$$

а потому

$$\frac{dF(r)}{dr} d^{n+1}r = d^n F(r);$$

отъ этого формула (6) принимаетъ видъ

$$\frac{1}{12\ldots(n+1)} d^{n+1} \Sigma \pm mm'F(r) \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Здѣсь сумма $\Sigma \pm mm'F(r)$ представляетъ общій потенціалъ для всѣхъ силъ взаимнаго дѣйствія точекъ m, m', m'', ...

При перемѣщеніяхъ $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}'$, . . . перваго порядка, полная работа всѣхъ этихъ силъ выразится полнымъ дифференціаломъ перваго порядка

$$d\,\Sigma \pm mm'F(r).$$

59. Если точки m, m', m'', . . . перемѣщаются такъ, что взаимныя ихъ разстоянія не перемѣняются, то $d^{n+1}r = 0$ для всѣхъ точекъ взятыхъ попарно; отъ этого выраженіе (6) равно нулю; слѣд. *полная работа силъ взаимнаго дѣйствія системы матерьяльныхъ точекъ, по закону равенства дѣйствія и противодѣйствія, равна нулю при перемѣщеніяхъ, неизмѣняющихъ разстояній между точками.*

Въ § 155 Кинематики мы видѣли, что всякое движеніе системы точекъ, неизмѣняющее разстояній между каждыми двумя точками, можетъ быть разложено: на поступательное, въ которомъ скорости и ускоренія равны соотвѣтственно скорости и ускореніямъ одной точки O, и на вращательное около этой точки; поэтому, если перемѣщенія $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}'$, . . . не измѣняютъ разстояній между точками m, m', m'' . . ., то онѣ могутъ быть разложены: на поступательныя, геометрически равныя перемѣщенію точки O и на перемѣщенія вращательныя около точки O, т. е. можно положить

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\alpha} + \bar{\beta},\ \bar{\varepsilon}' = \bar{\alpha} + \bar{\beta}',\ \bar{\varepsilon}'' = \bar{\alpha} + \bar{\beta}'', \ldots .$$

гдѣ $\bar{\alpha}$ есть перемѣщеніе точки O, а $\bar{\beta}$, $\bar{\beta}'$, . . . вращательныя перемѣщенія точекъ m, m', m'' . . . около O.

Если всѣ эти перемѣщенія будутъ перваго порядка, то можно положить

$$\bar{\alpha} = \overline{u\tau},\ \bar{\beta} = \overline{w\tau},\ \bar{\beta}' = \overline{w'\tau}, \ldots$$

гдѣ $\bar{u}$ есть скорость точки O, а $\bar{w}$, $\bar{w}'$, . . . вращательныя скорости точекъ m, m', . . . около O. Такія скорости имѣютъ мгновенную ось

и угловую скорость $\overline{\omega}$, отложенную извѣстнымъ образомъ на этой оси. Произведеніе $\sigma = \omega\tau$ представитъ безконечно-малое угловое перемѣщеніе, помощію котораго можно произвести перемѣщенія $\overline{\beta}$, $\overline{\beta'}$, ...

Вообще, если перемѣщенія суть безконечно-малыя порядка $n+1$, то

$$\overline{\alpha} = \frac{1}{1.2..(n+1)} \overline{u}_n \tau^{n+1}, \ \overline{\beta} = \frac{1}{1.2..(n+1)} \overline{w}_n \tau^{n+1}, \ \overline{\beta'} = \frac{1}{1.2..(n+1)} w_n \tau^{n+1}, \ldots$$

гдѣ $\overline{u}_n$ есть ускореніе порядка n въ движеніи точки О, а $\overline{w}_n$, $\overline{w}_n'$,... вращательныя ускоренія того же порядка около О. Такъ какъ скорость и всѣ ускоренія нисшаго порядка равны нулю при $\tau = 0$, то ускоренія $\overline{w}_n$, $\overline{w}_n'$,...должны имѣть мгновенную ось и нѣкоторое угловое ускореніе ω_n, которое опредѣляетъ угловое перемѣщеніе

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{1.2..(n+1)} \overline{\omega}_n \tau^{n+1},$$

способное произвести всѣ перемѣщенія: β, β', . . .

Такъ какъ

$$\overline{F\varepsilon} = \overline{F\alpha} + \overline{F\beta}$$

то работа каждой силы разлагается на работу относительно поступательнаго перемѣщенія $\overline{\alpha}$ и работу относительно вращательнаго перемѣщенія $\overline{\beta}$. Первый членъ равенъ работѣ силы $\overline{OM}$ геометрически равной F, приложенной къ точкѣ O. Во второмъ членѣ

$$\overline{F\beta} = \beta . F \cos (F\beta);$$

множитель β выражаетъ площадь параллелограма, въ которомъ одна сторона есть угловое перемѣщеніе $\overline{\sigma}$, отложенное на мгновенной оси, а другая радіусъ векторъ Om, проведенный въ точку приложенія силы F. Второй множитель $F \cos (F\beta)$ выражаетъ перпендикуляръ, опущенный изъ конца силы $\overline{F}$ на плоскость этого параллелограма, взятый при томъ съ $+$, когда уголъ $(F\beta)$ острый, и съ $-$, когда этотъ уголъ тупой; поэтому работа $\overline{F\beta}$ выражаетъ объемъ параллелепипеда, построеннаго на трехъ смежныхъ ребрахъ $\overline{\sigma}$, $\overline{Om}$ и $\overline{OM}$, взятый съ $+$ или $-$. Знакъ этого выраженія опредѣляется слѣдующимъ правиломъ:

Если наблюдатель $\bar{\sigma}$*), смотрящій на точку m видитъ силу F, направленную вправо, то должно взять $+$; если же онъ видитъ силу, направленную влѣво, то должно взять —.

Тотъ же объемъ можно выразить иначе, принявъ за основаніе параллелограмъ, построенный на сторонахъ Om и OM, а за высоту —перпендикуляръ, опущенный изъ конца ребра $\bar{\sigma}$ на плоскость этого параллелограма. Представимъ себѣ вращательное движеніе, въ которомъ угловая скорость изображена силою F и скорость k точки O въ этомъ движеніи есть величина равномѣрная площади разсматриваемаго параллелограма; перпендикуляръ, опущенный на его плоскость изъ конца $\bar{\sigma}$ есть тогда проэкція $\bar{\sigma}$ на скорости $\bar{k}$, т. е. $\sigma \cos(\sigma k)$, съ $+$ или съ —, смотря потому, будетъ ли σ направлено вправо или влѣво для наблюдателя F, смотрящаго на точку O.

Въ какую сторону направлена сила $\bar{F}$ для наблюдателя σ, смотрящаго на точку m, въ такую же сторону направлено σ для наблюдателя $\bar{F}$, смотрящаго на O; поэтому углы (σk) и $(F\beta)$ одноименные; слѣд.

$$\overline{F\beta} = k\sigma \cos(\sigma k) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Въ этомъ выраженіи работы силы относительно вращательнаго перемѣщенія, одинъ изъ множителей есть угловое перемѣщеніе $\bar{\sigma}$, и слѣд. не зависитъ отъ силы; другой же множитель $\bar{k}$ зависитъ: отъ величины силы $\bar{F}$, отъ ея направленія и отъ положенія въ пространствѣ прямой, по которой направлена сила; но независитъ отъ угловаго перемѣщенія $\bar{\sigma}$. Онъ также не зависитъ отъ мѣста точки приложенія силы $\bar{F}$ на прямой, по которой направлена сила, потому что вращательная скорость $\bar{k}$ не измѣняется, если вмѣсто угловой скорости $\bar{F}$ будетъ взята другая, ей геометрически равная, направленная по той же прямой.

Длина $\bar{k}$, представляющая вращательную скорость точки O при угловой скорости, изображенной силою F, называется *вращатель-*

---

*) Говоря, что длина представляетъ наблюдателя, мы будемъ подразумѣвать, что наблюдатель прислоненъ къ этой длинѣ и что ноги его въ началѣ, а голова въ концѣ длины.

*нымъ моментомъ силы $\overline{F}$ относительно O, или при началѣ O**).

Можно дать *вращательному моменту* чисто геометрическое опредѣленіе:

Вращательный моментъ силы $\overline{F}$ относительно точки O, или при началѣ O, есть длина, численно равная площади параллелограма, основаніе котораго есть сила, а высота перпендикуляръ, опущенный изъ начала O на силу, и возставленная изъ O перпендикулярно къ плоскости параллелограма вправо для наблюдателя F, смотрящаго на точку O.

Длину $\overline{OM}$, геометрически равную силѣ $\overline{F}$, и вращательный моментъ силы при началѣ O можно съ чисто геометрической точки зрѣнія разсматривать какъ два аргумента, служащіе для опредѣленія трехъ атрибутовъ длины $\overline{F}$: 1) положенія прямой, по которой направлена эта длина, 2) ея величины и 3) сторону направленія. (См. Кин. § 180).

Аргументъ OM мы будемъ называть *векторомъ силы F при началѣ O*, и для сокращенія обозначенія обоихъ аргументовъ примемъ знакоположеніе:

$$\overline{OM} = вF, \quad \overline{k} = MF.$$

Эти два аргумента связаны условіемъ

$$\overline{MF . вF} = 0,$$

выражающимъ взаимную ихъ перпендикулярность.

По формулѣ (8) имѣемъ

$$\overline{F\mathfrak{P}} = \overline{MF . \sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Въ частномъ случаѣ, когда угловое перемѣщеніе $\overline{\sigma}$ и MF направлены по одной прямой въ одну сторону, это выраженіе приводится къ алге-

*) Она также называется *статическимъ моментомъ* и *линейнымъ моментомъ* (Кинем.).

браическому произведенію $\overline{MF}.\sigma$; тогда вращательная работа пропорціональна вращательному моменту и можно разсматривать моментъ силы какъ мѣру ея вращательной работы.

Если изъ точки O опустимъ на прямую, по которой направлена сила $\overline{F}$, перпендикуляръ OD и замѣнимъ силу F геометрически равною, приложенною къ точкѣ D, то можно разсматривать OD какъ плечо рычага, на концѣ котораго дѣйствуетъ перпендикулярная сила; поэтому OD называется *плечемъ силы* $\overline{F}$.

Величина вращательной работы (9), какъ мы видѣли выше, численно равна объему параллелепипеда, въ которомъ три смежныя ребра суть: векторъ $\overline{eF}$, разстояніе Om точки O отъ точки приложенія силы и угловое перемѣщеніе $\overline{\sigma}$. Этотъ объемъ содержитъ шесть разъ объемъ тетраедра, въ которомъ два противоположныя ребра суть: сила $\overline{F}$ и угловое перемѣщеніе $\overline{\sigma}$. Означая (какъ въ § 148 Кинематики) послѣдній объемъ чрезъ (F, σ), мы будемъ имѣть

$$\overline{\sigma . MF} = 6(F, \sigma) \text{..;} \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Въ разсматриваемомъ параллелепипедѣ можно взять за основаніе параллелограмъ, построенный на сторонахъ $\overline{\sigma}$ и $\overline{eF}$, а за высоту кратчайшее разстояніе между силою F и угловымъ перемѣщеніемъ $\overline{\sigma}$. Означая это кратчайшее разстояніе чрезъ δ, мы будемъ имѣть

$$\overline{\sigma . MF} = F\sigma \sin (F, \sigma) . \delta \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

причемъ должно взять для $(F\sigma)$ уголъ $< 180°$, когда сила F направлена вправо для наблюдателя σ, и $> 180°$, когда она направлена влѣво.

Множитель $\sin (F\sigma) . \delta$ въ выр. (11) зависитъ только отъ относительнаго положенія прямыхъ, по которымъ направлены длины F и $\overline{\sigma}$, и равномѣренъ шесть разъ взятому объему тетраедра, въ которомъ противоположныя ребра суть двѣ длины, равныя единицѣ, отложенныя на прямыхъ, по которымъ направлены F и $\overline{\sigma}$.

Такая величина называется *относительнымъ моментомъ двухъ прямыхъ, по которымъ направлены длины* $\overline{F}$ и $\overline{\sigma}$.

Мы будемъ его означать чрезъ $\left(\frac{F}{\sigma}\right)$ или $\left(\frac{\sigma}{F}\right)$. Слѣд. формула (11) беретъ видъ

$$\overline{MF.\sigma} = F\sigma\left(\frac{F}{\sigma}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Замѣтимъ еще, что $F \sin(F\sigma)$ есть проекція силы $\overline{F}$ на плоскости перпендикулярной къ σ, а

$$MF \cos(MF, \sigma) = F \sin(F\sigma)\delta = F\left(\frac{F}{\sigma}\right)$$

есть моментъ силы, изображенной этою проекціею, относительно точки пересѣченія плоскости проекціи съ прямою, по которой направлена $\overline{\sigma}$; вмѣстѣ съ тѣмъ онъ выражаетъ проекцію вращательнаго момента съ $\overline{MF}$ на этой прямой. Проекція вращательнаго момента силы на какой либо оси называется *моментомъ силы относительно этой оси.*

На основаніи формулы (9) для работы силы относительно вращательнаго перемѣщенія, можно выразить работу силы $\overline{F}$ относительно перемѣщенія $\overline{\varepsilon}$, сложнаго изъ поступательнаго $\overline{\alpha}$ и вращательнаго $\overline{\beta}$ формулою

$$\overline{F\varepsilon} = \overline{\alpha e F} + \overline{\sigma MF} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Если система полныхъ перемѣщеній $\overline{\varepsilon}$, $\overline{\varepsilon'}$, ... есть вращательная около оси, непроходящей чрезъ начало O аргументовъ eF и MF, съ угловымъ перемѣщеніемъ $\overline{\sigma}$, имѣющемъ начало въ O', то можно разложить такую систему перемѣщеній: на поступательную, въ которой общее перемѣщеніе $\overline{\alpha}$ геометрически равно вращательному перемѣщенію точки O около O' съ угловою скоростью σ, и на вращательную около O съ угловымъ перемѣщеніемъ геометрически равнымъ $\overline{\sigma}$.

Послѣднее угловое перемѣщеніе можно означить чрезъ $e\sigma$, а поступательное перемѣщеніе α чрезъ $M\sigma$; слѣд. по формулѣ (13) мы будемъ имѣть

$$\overline{F\varepsilon} = \overline{M\sigma . eF} + \overline{e\sigma . MF}.$$

Съ другой стороны, если означить чрезъ $M'F$ моментъ силы $\overline{F}$ относительно начала O', то будемъ имѣть $\overline{F\varepsilon} = \overline{\sigma . M'F}$; слѣд.

$$\overline{\sigma . M'F} = \overline{M\sigma . \mathit{в}F} + \overline{\mathit{в}\sigma . MF} \dots\dots\dots\dots (14)$$

Раздѣливъ это на $F\sigma$, мы получимъ замѣчательное соотношеніе между моментами двухъ прямыхъ $\overline{F}$ и $\overline{\sigma}$ относительно прямыхъ, имъ параллельныхъ, проведенныхъ чрезъ начало O:

$$\left(\begin{smallmatrix}F\\ \sigma\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\sigma\\ \mathit{в}F\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}F\\ \mathit{в}\sigma\end{smallmatrix}\right) \dots\dots\dots\dots (15)$$

Когда $\overline{F}$ и $\overline{\sigma}$ лежатъ въ одной плоскости, тогда:

$$\overline{\sigma . M'F} = 0, \left(\begin{smallmatrix}F\\ \sigma\end{smallmatrix}\right) = 0,$$

и обратно: когда эти равенства существуютъ, тогда $\overline{F}$ и $\overline{\sigma}$ лежатъ въ одной плоскости. Такое необходимое и достаточное условіе, чтобы двѣ прямыя находились въ одной плоскости, выражается однимъ изъ двухъ уравненій:

$$\overline{M\sigma . \mathit{в}F} + \overline{\mathit{в}\sigma . MF} = 0 \dots\dots\dots\dots (16)$$

$$\left(\begin{smallmatrix}\sigma\\ \mathit{в}F\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}F\\ \mathit{в}\sigma\end{smallmatrix}\right) = 0 \dots\dots\dots\dots (17)$$

Замѣтимъ еще, что моментъ MF (какъ скорость вращенія точки O при угловой скорости $\overline{F}$) составляется изъ момента $M'F$ (скорости вращенія точки O' при той же угловой скорости $\overline{F}$) и $M(\mathit{в}'F)$, который есть скорость точки O при угловой скорости $\mathit{в}'F$; слѣд.

$$\overline{MF} = \overline{M'F} + \overline{M(\mathit{в}'F)}$$

или

$$\overline{M'F} = \overline{MF} - \overline{M(\mathit{в}'F)} \dots\dots\dots\dots (18)$$

Эта формула можетъ служить для перемѣны начала векторовъ и моментовъ силы.

Полная работа данной системы силъ: $\overline{F}, \overline{F'}, \dots$ приложенныхъ къ точкамъ $m, m', m'', \dots$ относительно перемѣщеній $\overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon'}, \overline{\varepsilon''}, \dots$ неизмѣняющихъ разстояній между этими точками получится, если мы приложимъ фомулу (13) къ каждой силѣ и возьмемъ сумму выводовъ; отъ этого получимъ

$$\Sigma \overline{F\varepsilon} = \overline{\alpha \Sigma \theta F} + \overline{\sigma \Sigma MF}, \ldots \ldots \ldots \ldots (19)$$

гдѣ $\Sigma \overline{\theta F}$ есть геометрическая сумма векторовъ всѣхъ силъ при началѣ O, а $\Sigma \overline{MF}$ геометрическая сумма моментовъ всѣхъ силъ при томъ же началѣ. Первая сумма есть равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ точкѣ O и геометрически равныхъ даннымъ силамъ. Мы будемъ называть ее *главнымъ векторомъ*. Вторая сумма называется *главнымъ вращательнымъ моментомъ* и просто *главнымъ моментомъ*.

Означая первый чрезъ $\overline{R}$, а второй чрезъ $\overline{K}$, можно представить формулу (19) подъ видомъ

$$\Sigma \overline{F\varepsilon} = \overline{\alpha R} + \overline{\sigma K} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (20)$$

Такимъ образомъ полная работа всякой системы силъ относительно перемѣщенiй, неизмѣняющихъ разстоянiй между точками приложенiя, выражается помощiю четырехъ величинъ: $\overline{R}$, $\overline{K}$, $\overline{\alpha}$, $\overline{\sigma}$. Первыя двѣ зависятъ только отъ силъ и положенiя начала O, а двѣ прочiя—отъ системы перемѣщенiй.

Двѣ силы равныя и противоположныя, направленныя по одной прямой или по разнымъ прямымъ, имѣютъ равные и противоположные векторы, которые исчезаютъ въ суммѣ $R = \Sigma \theta F$. А двѣ силы равныя и противоположныя, направленныя по одной прямой, имѣютъ равные и противоположные вращательные моменты, которые исчезаютъ въ суммѣ $\overline{K} = \Sigma MF$. Слѣд. въ выраженiи полной работы (20) исчезаетъ работа перваго рода силъ отнотельно поступательнаго перемѣщенiя и совсѣмъ исчезаетъ работа второго рода силъ.

И такъ: *главный векторъ, главный моментъ и полная работа всѣхъ силъ относительно перемѣщенiй, неизмѣняющихъ взаимныя разстоянiя между точками приложенiя, не зависятъ отъ внутреннихъ силъ, подчиненныхъ третьему закону началъ Ньютона: равенства дѣйствiя и противодѣйствiя. Эти величины могутъ только зависѣть отъ внѣшнихъ силъ, или отъ неподчиненныхъ этому закону внутреннихъ силъ.*

Когда данныя силы $\overline{F}$, $\overline{F'}$,.... приложены къ одной точкѣ m, то онѣ имѣютъ равнодѣйствующую $\overline{P} = \Sigma \overline{F}$ и полная работа $\Sigma \overline{F\varepsilon}$

относительно перемѣщенія $\overline{\varepsilon}$ общей точки приложенія равна (какъ было доказано выше) работѣ равнодѣйствующей $\overline{P\varepsilon}$; притомъ мы будемъ имѣть $\overline{R} = \overline{P}$ для всякаго начала O. Прилагая ур.

$$\Sigma\overline{F\varepsilon} = \overline{P\varepsilon}$$

къ вращательному перемѣщенію около O съ угловымъ перемѣщеніемъ $\overline{\sigma}$, мы получимъ:

$$\overline{\sigma\Sigma\overline{MF}} = \overline{\sigma MP}.$$

Чтобы это уравненіе существовало при всякомъ $\overline{\sigma}$, необходимо

$$\Sigma\overline{MF} = \overline{MP},$$

т. е. чтобы главный моментъ $\overline{k}$ былъ равенъ моменту равнодѣйствующей $\overline{P}$.

Это заключеніе вытекаетъ также изъ того, что вращательныя скорости MF, MF', MF'',... точки O съ угловыми скоростями $\overline{F}$, $\overline{F'}$,.... слагаются въ одну вращательную скорость съ угловою скоростью $\overline{P} = \Sigma\overline{F}$.

60. Если система матерьяльныхъ точекъ m, m', m'',... движется отъ дѣйствія внѣшнихъ и внутреннихъ силъ и во время t имѣетъ ускоренія перваго порядка: v_1, v_1', v_1'',...; то $\overline{mv_1}$, $\overline{mv_1'}$, $\overline{mv_1''}$,... будутъ силы, производящія эти ускоренія и называются *движущими*. Каждая движущая сила есть геометрическая сумма всѣхъ силъ дѣйствующихъ на єя точки приложенія, какъ внутреннихъ такъ и внѣшнихъ.

Означая вообще чрезъ $(m^{(p)} m^{(q)})$ силу дѣйствія точки $m^{(q)}$ на $m^{(p)}$, и чрезъ $\overline{F}$, $\overline{F'}$,... внѣшнія силы, мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \overline{mv_1} &= \overline{F} + \overline{(mm')} + \overline{(mm'')} + \dots\\ \overline{m'v_1'} &= \overline{F'} + \overline{(m'm)} + \overline{(m'm'')} + \dots\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \end{aligned}\right\} \dots\dots (21)$$

поэтому

$$\overline{в(mv_1)} = \overline{вF} + \overline{в(mm')} + \overline{в(mm'')} + \ldots.$$

$$\overline{в(m'v_1')} = \overline{вF'} + \overline{в(m'm)} + \overline{в(m'm'')} + \ldots$$

. . . .

$$\overline{M(mv_1)} = \overline{MF} + \overline{M(mm')} + \overline{M(mm'')} + \ldots.$$

$$\overline{M(m'v_1')} = \overline{MF'} + \overline{M(m'm)} + \overline{M(m'm'')} + \ldots$$

. . . . ;

отсюда выводимъ:

$$\overline{R} = \Sigma\overline{в(mv_1)} = \Sigma\overline{F}, \quad \overline{K} = \Sigma\overline{M(mv_1)} = \Sigma\overline{MF}.$$

Эти формулы показываютъ, что *всѣ движущія силы:* $\overline{mv_1}$, $\overline{m'v_1'}$,... *имѣютъ тотъ же главный векторъ и тотъ же главный моментъ, что и система всѣхъ силъ, ихъ составляющихъ; приэтомъ въ геометрической суммѣ исчезаютъ векторы и моменты всѣхъ внутреннихъ силъ.*

Помноживъ геометрически силы (21) на произвольныя перемѣщенія $\overline{\varepsilon}$, $\overline{\varepsilon'}$,... ихъ точекъ приложенія, и взявъ сумму произведеній, мы получимъ полную работу движущихъ силъ:

$$\Sigma\overline{mv_1 . \varepsilon} = \Sigma\overline{F\varepsilon} + \Sigma[(mm')\varepsilon + (m'm)\varepsilon'] \ldots\ldots (22)$$

гдѣ во второмъ членѣ знакъ суммы Σ распространяется на всѣ точки m, m',..., взятыя попарно. Для перемѣщеній $\overline{\varepsilon}$, $\overline{\varepsilon'}$,..., неизмѣняющихъ разстояній эта сумма, по доказанному выше равна нулю; слѣд. тогда

$$\Sigma\overline{mv_1 . \varepsilon} = \Sigma\overline{F\varepsilon} = \overline{\alpha R} + \overline{\sigma K} \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

гдѣ $\overline{\alpha}$ произвольное поступательное перемѣщеніе, а $\overline{\sigma}$ произвольное угловое вращательное перемѣщеніе.

Когда всѣ силы, дѣйствующія на систему точекъ m, m',.... уравновѣшиваются, тогда силы $\overline{mv_1}$, $\overline{mv_1'}$,...равны нулю; отъ этого по ур. (22) имѣемъ

$$\Sigma\overline{F\varepsilon} + \Sigma[(mm')\varepsilon + (m'm)\varepsilon'] = 0 \ldots\ldots\ldots (24)$$

для всякихъ перемѣщеній $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}'$,.... Обратно: если ур. (24) существуетъ для произвольныхъ перемѣщеній $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}'$,..., то

$$\Sigma\overline{mv_1 . \varepsilon} = 0$$

при всякихъ $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}'$,..., для чего необходимо $mv_1 = 0$, $mv'_1 = 0 \ldots$

И такъ *для равновѣсія внѣшнихъ и внутреннихъ силъ, дѣйствующихъ на какую либо систему точекъ, необходимо и достаточно, чтобы полная работа силъ относительно всякихъ перемѣщеній была равна нулю.*

При перемѣщеніяхъ $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}'$,..., неизмѣняющихъ разстояній между точками, ур. (24) или (23), даетъ

$$\overline{\alpha R} + \overline{\sigma K} = 0,$$

при $\bar{\alpha}$ и $\bar{\sigma}$ произвольныхъ. А для этого необходимо $R = 0$ и $K = 0$.

Слѣд. *для равновѣсія внѣшнихъ и внутреннихъ силъ необходимо, чтобы главный векторъ и главный моментъ всѣхъ силъ были равны нулю.*

Этого условія однакожъ недостаточно для равновѣсія, когда разстоянія между точками могутъ измѣняться; потому что, если $R = 0$ и $K = 0$, то изъ ур. (22) слѣдуетъ только, что работа всѣхъ движущихъ силъ равна нулю для перемѣщеній, неизмѣняющихъ разстояній между точками; но она можетъ быть не равна нулю для другихъ перемѣщеній и слѣд. нельзя заключить, что $mv_1 = 0$, $m'v_1' = 0, \ldots$

61. Можно доказать, что условія $R = 0$ и $K = 0$ достаточны для равновѣсія силъ, когда система точекъ приложенія m, m', m'',... *неизмѣняема*, т. е. когда она принадлежитъ совершенно твердому тѣлу. Такихъ тѣлъ въ природѣ не существуетъ; но весьма часто позволительно не обращать вниманія на весьма малыя измѣненія въ разстояніяхъ между частицами естественныхъ тѣлъ, и замѣнить эти тѣла, при разсматриваніи главныхъ обстоятельствъ равновѣсія силъ, на нихъ дѣйствующихъ, фиктивными, совершенно твердыми тѣлами; тогда точки приложенія силъ представятъ неизмѣняемую систему.

Чтобы доказать достаточность условій $R=0$ и $K=0$ для равновѣсія силъ $\overline{F}$, $\overline{F'}$,..., дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему m, m',..., съ внутренними силами, надобно показать, что точки m, m', m'',.., находящіяся во время t въ покоѣ, могутъ получить отъ дѣйствія на нихъ всѣхъ силъ только такое движеніе, въ которомъ всѣ ускоренія перваго порядка: $\overline{v_1}$, $\overline{v_1'}$,..., соотвѣтствующія времени t, равны нулю.

Допустивъ, что $\overline{v_1}$, $\overline{v_1'}$, v_1'';... суть ускоренія перваго порядка въ движеніи точекъ m, m', m'',..., возьмемъ для перемѣщеній $\overline{\varepsilon}$, $\overline{\varepsilon'}$,... элементарныя перемѣщенія втораго порядка во время τ:

$$\overline{\varepsilon}=\tfrac{1}{2}\overline{v_1}\tau^2,\ \varepsilon'=\tfrac{1}{2}\overline{v_1}'\tau^2,\ldots .$$

Такъ какъ работа внутреннихъ силъ при такихъ перемѣщеніяхъ равна нулю, то мы будемъ имѣть ур. (22), которое беретъ видъ

$$\tfrac{1}{2}\tau^2\Sigma m v_1{}^2=\overline{\alpha R}+\overline{\sigma K},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(25)$$

гдѣ $\overline{\alpha}$ и $\overline{\sigma}$ суть поступательное перемѣщеніе и угловое вращательное перемѣщеніе въ системѣ истинныхъ перемѣщеній: $\overline{\varepsilon}$, $\overline{\varepsilon'}$,...

Изъ этого уравненія слѣдуетъ, что когда $R=0$ и $K=0$, то $\Sigma m v_1{}^2=0$. А для этого необходимо: $v_1=0$, $v_1'=0$,.... Слѣд. всѣ силы (20) равны нулю, а потому всѣ силы, дѣйствующія на каждую изъ точекъ m, m', m'',... уравновѣшиваются во время t по крайней мѣрѣ — моментально.

И такъ: *для равновѣсія всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему точекъ, необходимо и достаточно, чтобы главный векторъ и главный моментъ всѣхъ силъ были равны нулю.*

Такъ какъ векторы и моменты внутреннихъ силъ, дѣйствующихъ по закону: равенства дѣйствія и противодѣйствія не входятъ въ выраженія $\overline{R}$ и $\overline{K}$, то ур. $R=0$ и $K=0$ называются обыкновенно условіями равновѣсія внѣшнихъ силъ*).

*) Къ этимъ силамъ должно относить тѣ силы взаимнаго дѣйствія, которыя, будучи равны и противоположны, не направлены по одной прямой, напр. силы взаимнаго дѣйствія элемента тока и элемента магнита, по закону Ампера.

Кромѣ неизмѣняемой системы точекъ допускаются въ механикѣ другія фиктивныя системы точекъ (см. Кин. глав. XIII), возможныя перемѣщенія которыхъ обусловливаются уравненіями или неравенствами.

Мы увидимъ ниже, что для равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на такія системы, къ условіямъ $R=0$ и $K=0$ присоединяются спеціальныя условія, зависящія отъ вида условій для возможныхъ перемѣщеній.

62. Пусть будутъ: x, y, z, координаты точки приложенія силы $\overline{F}$ относительно прямоугольныхъ осей Ox, Oy, Oz; X, Y, Z — проекціи силы на этихъ осяхъ, а $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ проекціи перемѣщенія $\overline{\varepsilon}$ точки (x, y, z). Полагая, что $\overline{\varepsilon}$ принадлежитъ къ системѣ перемѣщеній $\overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon}', \ldots$, неизмѣняющихъ разстояній между точками $m, m', \ldots$ и разлагающихся на поступательное съ общимъ перемѣщеніемъ $\overline{\alpha}$ и вращательное съ угловымъ перемѣщеніемъ $\overline{\sigma}$, означимъ чрезъ $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ проекціи $\overline{\alpha}$ и чрезъ p, q, r — проекціи $\overline{\sigma}$ на осяхъ Ox, Oy, Oz.

По формуламъ Ейлера (см. § 143 Кинем.) мы будемъ имѣть:

$$\varepsilon_x=\alpha_x+\begin{vmatrix} q & r \\ y & z \end{vmatrix},\ \varepsilon_y=\alpha_y+\begin{vmatrix} r & p \\ z & x \end{vmatrix},\ \varepsilon_z=\alpha_z+\begin{vmatrix} p & q \\ x & y \end{vmatrix};$$

отъ этого элементарная работа силы $\overline{F}$ выразится формулою

$$\overline{F\varepsilon}=X\varepsilon_x+Y\varepsilon_y+Z\varepsilon_z$$

$$=X\alpha_x+Y\alpha_y+Z\alpha_z+X\begin{vmatrix} q & r \\ y & z \end{vmatrix}+Y\begin{vmatrix} r & p \\ z & x \end{vmatrix}+Z\begin{vmatrix} p & q \\ x & y \end{vmatrix}.$$

Здѣсь первые три члена выражаютъ работу относительно поступательнаго перемѣщенія, т. е.

$$\overline{F\alpha}=X\alpha_x+Y\alpha_y+Z\alpha_z,$$

а три остальные работу относительно вращательнаго перемѣщенія, т. е.

$$\overline{F\beta}=X\begin{vmatrix} q & r \\ y & z \end{vmatrix}+Y\begin{vmatrix} r & p \\ z & x \end{vmatrix}+Z\begin{vmatrix} p & q \\ x & y \end{vmatrix},$$

что можно представить подъ видомъ опредѣлителя:

$$\overline{F\beta}=\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

Этотъ опредѣлитель, какъ извѣстно, выражаетъ объемъ параллелепипеда, въ которомъ начало O есть одна изъ вершинъ и три ребра при этой вершинѣ имѣютъ проекціями на осяхъ Ox, Oy, Oz — элементы каждой строки, а именно: 1) векторъ $\overline{eF}$, проекціи котораго суть: X, Y, Z; 2) угловое перемѣщеніе $\overline{\sigma}$, проекціи котораго суть: p, q, r и 3) радіусъ векторъ Om точки приложенія силы, проекціи котораго суть: x, y, z. Это согласно съ доказаннымъ въ § 59.

Можно дать выраженію (25) видъ линейной функціи трехъ величинъ p, q, r:

$$\overline{F\beta}=p\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}+q\begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}+r\begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}.$$

Опредѣлители втораго порядка

$$\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

суть проекціи на осяхъ Ox, Oy, Oz вращательнаго момента $k=MF$ (см. примѣч. стр. 58 Кинематики); поэтому

$$\overline{F\beta}=pk\cos(kx)+qk\cos(ky)+rk\cos(kz)=\overline{\sigma.MF},$$

что согласно съ § 59.

Сравнивая это выраженіе съ (25), будемъ имѣть

$$\overline{\sigma.MF}=\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

Отсюда получимъ выраженіе объема тетраедра, въ которомъ $\overline{F}$ и $\overline{\sigma}$ суть противоположные ребра:

$$(F,\sigma)=\tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Раздѣливъ элементы первой строки опредѣлителя (25) на F, а элементы второй на σ, мы получимъ выраженіе относительнаго момента прямыхъ, по которымъ направлены $\overline{F}$ и $\overline{\sigma}$:

$$\binom{F}{\sigma} = \begin{vmatrix} \cos(Fx), & \cos(Fy), & \cos(Fz) \\ \cos(\sigma x), & \cos(\sigma y), & \cos(\sigma z) \\ x, & y, & z \end{vmatrix}$$

При угловомъ перемѣщеніи $\overline{\sigma}$, имѣющемъ начало въ точкѣ $O'(x', y', z')$ вращательная работа силы F выразится формулою

$$\overline{\sigma . M'F} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ p & q & r \\ x - x', & y - y', & z - z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & q & r \\ X & Y & Z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

Отсюда вытекаетъ ур. (14)

$$\overline{\sigma . M'F} = \overline{\theta\sigma . MF} + \overline{\theta F . M\sigma},$$

а раздѣливъ на F и σ, получимъ ур. (15)

$$\binom{F}{\sigma} = \binom{F}{\theta\sigma} + \binom{\sigma}{\theta F}.$$

Условіе, что прямыя, по которымъ направлены $\overline{F}$ и $\overline{\sigma}$ лежатъ въ одной плоскости, можно выразить уравненіемъ

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ p & q & r \\ x - x', & y - y', & z - z' \end{vmatrix} = 0.$$

Шесть величинъ:

$$X, Y, Z, \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} \dots\dots\dots (28)$$

суть Плюкеровскія (лучевыя) координаты прямой, по которой направлена сила $\overline{F}$*); онѣ всегда связаны уравненіемъ

$$X \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} + Y \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} + Z \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} = 0$$

выражающимъ перпендикулярность вектора $\overline{\theta F}$ къ моменту $\overline{MF}$, тоже что ур. на стр. 276.

---

*) Neue Geometrie des Raumes gegründert auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Leipzig, 1868.

$$\overline{\mathfrak{v}F}.\overline{MF}=0.$$

При другомъ началѣ для вектора и момента O' (x', y', z') первыя три координаты (26) остаются тѣ же, а остальныя три перемѣнятся на слѣдующія

$$\begin{vmatrix} y-y', & z-z' \\ Y, & Z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z-z', & x-x' \\ Z, & X \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x-x', & y-y' \\ X, & Y \end{vmatrix}.$$

Такъ какъ

$$\begin{vmatrix} y-y', & z-z' \\ Y, & Z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} y' & z' \\ Y & Z \end{vmatrix}$$

то проекція на оси Ox новаго момента $M'F$ равна проекціи прежняго момента MF безъ проекціи момента новаго вектора $\mathfrak{v}'F$. Чтобы это существовало для всякой оси Ox, необходимо

$$\overline{M'F}=\overline{MF}-\overline{M(\mathfrak{v}'F)},$$

что согласно съ формулою (18).

Пусть будутъ:

$$(x, y, z), (x', y', z'), \ldots .$$

координаты точекъ приложенія силъ $\overline{F}$, $\overline{F'}$, ...;

$$(X, Y, Z), (X', Y', Z'), \ldots .$$

проекціи этихъ силъ на осяхъ Ox, Oy, Oz и $\overline{R}$ и $\overline{K}$ — главный векторъ и главный моментъ этой системы силъ. Такъ какъ

$$\overline{R}=\overline{\Sigma \mathfrak{v}F}, \; \overline{K}=\overline{\Sigma MF},$$

то

$$\left.\begin{array}{l} R\cos(Rx)=\Sigma X,\; R\cos(Ry)=\Sigma Y,\; R\cos(Rz)=\Sigma Z \\ K\cos(Kx)=\Sigma\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix},\; K\cos(Ky)=\Sigma\begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix},\; K\cos(Kz)=\Sigma\begin{vmatrix} x & z \\ X & Z \end{vmatrix} \end{array}\right\} \ldots (28)$$

Такимъ образомъ помощію координатъ точекъ приложенія силъ и проекцій силъ на осяхъ координатъ можно вычислить проекціи на

этихъ осяхъ главнаго вектора и главнаго момента, что послужитъ для опредѣленія величины и направленія каждаго изъ этихъ двухъ аргументовъ данной системы силъ.

Такъ какъ работа одной силы выражается формулою

$$\overline{F\varepsilon} = X\alpha_x + Y\alpha_y + Z\alpha_z + p\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} + r\begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}$$

то для полной работы всѣхъ силъ будемъ имѣть выраженіе

$$\Sigma\overline{F\varepsilon} = \alpha_x\,\Sigma X + \alpha_y\,\Sigma Y + \alpha_z\,\Sigma Z$$

$$+ p\Sigma\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} + q\Sigma\begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} + r\Sigma\begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (29)$$

что однозначительно съ выраженіемъ (20).

Условія равновѣсія $R = 0$ и $K = 0$ могутъ быть замѣнены условіями, что проекціи на осяхъ Ox, Oy, Oz каждаго изъ аргументовъ $\overline{R}$ и $\overline{K}$ равны нулю, т. е. шестью уравненіями:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma X = 0,\ \ \Sigma Y = 0,\ \ \Sigma Z = 0 \\ \Sigma\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} = 0,\ \ \Sigma\begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} = 0,\ \ \Sigma\begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (30)$$

Эти ур. необходимы для равновѣсія силъ, какова бы не была система точекъ приложенія силъ. Онѣ достаточны для равновѣсія силъ, приложенныхъ къ неизмѣняемой системѣ точекъ.

Уравненія (30) выражаютъ слѣдующее свойство прямыхъ, по которымъ направлены силы: *шесть суммъ, составленныхъ изъ одноимянныхъ лучевыхъ координатъ всѣхъ прямыхъ, по которымъ направлены силы, равны нулю.*

Плюкеровскія лучевыя координаты (28) могутъ быть замѣнены другими, болѣе общими и однородными*).

Возьмемъ за новыя прямолинейныя координаты точки (x, y, z) три линейныя функціи:

*) Mathemat. Annalen, herausg. von A. Clebch und C. Neumann. B. I und II. Analytische Geometrie des Raumes von G. Salmon, deutsch bearbeitet von W. Fiedler. Zweite verbesserte Auflage 1. Theil. Art. 50.

$$q_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1$$

$$q_2 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2$$

$$q_3 = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3$$

гдѣ α_i, β_i, γ_i, δ_i суть произвольныя постоянныя, удовлетворяющія только условію, что опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

не равенъ нулю. Означая чрезъ Q_1, Q_2, Q_3 разности между соотвѣтственными новыми координатами конца и начала силы $\overline{F}$, мы будемъ имѣть:

$$Q_1 = \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z$$

$$Q_2 = \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z$$

$$Q_3 = \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z.$$

Шесть величинъ

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ \begin{vmatrix} q_2 & q_3 \\ Q_2 & Q_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} q_3 & q_1 \\ Q_3 & Q_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ Q_1 & Q_2 \end{vmatrix} \ldots\ldots (32)$$

можно разсматривать какъ новыя лучевыя координаты прямой, по которой направлена сила $\overline{F}$. Составивъ такія координаты для каждой изъ данныхъ силъ и взявъ суммы одноимянныхъ координатъ, мы найдемъ, что вообще:

$$\Sigma Q_i = \alpha_i \Sigma X + \beta_i \Sigma Y + \gamma_i \Sigma Z$$

$$\Sigma \begin{vmatrix} q_i & q_k \\ Q_i & Q_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_i & \gamma_i \\ \beta_k & \gamma_k \end{vmatrix} \Sigma \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_i & \alpha_i \\ \gamma_k & \alpha_k \end{vmatrix} \Sigma \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_k & \beta_k \end{vmatrix} \Sigma \begin{vmatrix} x & z \\ X & Z \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \delta_i & \alpha_i \\ \delta_k & \alpha_k \end{vmatrix} \Sigma X + \begin{vmatrix} \delta_i & \beta_i \\ \delta_k & \beta_k \end{vmatrix} \Sigma Y + \begin{vmatrix} \delta_i & \gamma_i \\ \delta_k & \gamma_k \end{vmatrix} \Sigma Z$$

Изъ этого видно, что ур. (30) преобразовываются въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma Q_1 = 0,\ \Sigma Q_2 = 0,\ \Sigma Q_3 = 0\\ \Sigma\begin{vmatrix} q_2 & q_3 \\ Q_2 & Q_3 \end{vmatrix} = 0,\ \Sigma\begin{vmatrix} q_3 & q_1 \\ Q_3 & Q_1 \end{vmatrix} = 0,\ \Sigma\begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ Q_1 & Q_2 \end{vmatrix} = 0\end{aligned}\right\}\ldots(33)$$

Обратно, вслѣдствіе того, что опредѣлитель (31) не равенъ нулю, ур. (30) будутъ существовать, когда удовлетворены ур. (33).

Величины q_1, q_2, q_3 могутъ представлять какія ни есть, прямоугольныя или косоугольныя, прямолинейныя координаты относительно осей, имѣющихъ начало въ какой ни есть точкѣ. Онѣ также могутъ представлять кратчайшія разстоянія точки отъ трехъ данныхъ плоскостей:

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = 0$$

$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 = 0$$

$$\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3 = 0$$

63. На основаніи формулы (12) для работы одной силы относительно вращательнаго перемѣщенія составляется выраженіе полной работы системы силъ $\overline{F}$, $\overline{F'}$, . . . относительно вращательнаго перемѣщенія точекъ приложенія съ угловою скоростью $\overline{\sigma}$, а именно:

$$\overline{K\sigma} = \sigma\,\Sigma\left(\frac{F}{\sigma}\right)F$$

гдѣ $\left(\frac{F}{\sigma}\right)$ есть относительный моментъ прямыхъ, по которымъ направлены сила $\overline{F}$ и угловое перемѣщеніе $\overline{\sigma}$, т. е. мгновенная ось вращенія; отсюда, раздѣливъ на σ, выводимъ

$$K\cos(K\sigma) = \Sigma F\left(\frac{F}{\sigma}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots(34)$$

выраженіе для проекціи главнаго момента на всякой прямой $\overline{\sigma}$, проведенной чрезъ начало O; слѣд. *проекція главнаго момента системы силъ на какой либо оси, проведенной чрезъ начало моментовъ, равна алгебраической суммѣ всѣхъ силъ, умноженныхъ на соотвѣтственные относительные моменты каждой прямой, по ко-*

торой направлены силы, и оси проекцій, или короче: *алгебраической суммѣ моментовъ всѣхъ силъ относительно оси проекцій.*

Въ случаѣ $K = 0$ будемъ имѣть

$$\Sigma F\binom{F}{\sigma} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

Слѣд. въ случаѣ равновѣсія силъ *алгебраическая сумма моментовъ всѣхъ силъ относительно всякой оси равна нулю.*

Примѣняя ур. (35) къ тремъ осямъ Ox, Oy, Oz, мы получимъ три послѣднія изъ уравненій (30). Ихъ можно представить подъ видомъ:

$$\Sigma F\binom{F}{x} = 0, \quad \Sigma F\binom{F}{y} = 0, \quad \Sigma F\binom{F}{z} = 0.$$

64. Уравненіе (35) удовлетворено и въ томъ случаѣ, когда силы не находятся въ равновѣсіи и главный ихъ моментъ $\overline{K}$ не равенъ нулю, а именно, когда для оси $\overline{\sigma}$ взята прямая, перпендикулярная къ $\overline{K}$. Всѣ такія прямыя лежатъ въ одной плоскости, которую Möbiусъ назвалъ *нулевою плоскостью.* Точку O въ этой плоскости, представляющую начало моментовъ, онъ назвалъ *нулевою точкою на плоскости* *).

Такъ какъ положеніе точки O въ пространствѣ произвольно, то *чрезъ всякую точку пространства можно провести безчисленное множество прямыхъ, имѣющихъ свойство: что алгебраическая сумма моментовъ силъ относительно каждой такой прямой равна нулю.*

Легко видѣть, что всѣ такія прямыя суть лучи линейнаго комплекса $[K, R]$ параметры котораго суть: главный моментъ $\overline{K}$ и главный векторъ $\overline{R}$ (см. Кин. § 180).

Въ самомъ дѣлѣ: перенеся начало моментовъ изъ O въ O' и означая чрезъ $M'F$ и K' моментъ силы $\overline{F}$ и главный моментъ относительно новаго начала по ф. (14) мы будемъ имѣть

$$\overline{\sigma . M'F} = \overline{M\sigma . eF} + \overline{e\sigma . MF};$$

*) Lehrbuch der Statik. I Theil s. 145.

слѣд.

$$\overline{\sigma \Sigma \overline{M'F}} = \overline{M\sigma . \Sigma \overline{eF}} + \overline{e\sigma . \Sigma \overline{MF}}$$

т. е.

$$\overline{\sigma K'} = \overline{M\sigma . R} + \overline{e\sigma . K}.$$

Для прямой $\bar{\sigma}$, перпендикулярной къ $\bar{K}'$, первая часть этого уравненія равна нулю, а потому

$$\overline{R . M\sigma} + \overline{e\sigma . K} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

Это уравненіе, связывающее аргументы $e\sigma$ и $M\sigma$ прямой $\bar{\sigma}$, принадлежитъ линейному комплексу $[K, R]$, параметры котораго при началѣ O суть: $\bar{K}$ и $\bar{R}$ (см. § 180 Кинем.). Всѣ лучи этого комплекса, проходящіе чрезъ какую либо точку O', лежатъ въ одной плоскости, которая есть *нулевая плоскость*. Полюсъ O' этой плоскости есть нулевая точка.

Означая чрезъ A, B, C—проекціи главнаго вектора $\bar{R}$ на осяхъ Ox, Oy, Oz, чрезъ L, M, N проекціи главнаго момента $\bar{K}$, чрезъ α, β, γ — проекціи вектора $e\sigma$ и чрезъ λ, μ, ν проекціи $M\sigma$, можно представить ур. (36) подъ видомъ

$$A\lambda + B\mu + C\nu + L\alpha + M\beta + N\gamma = 0$$

линейнымъ и однороднымъ относительно шести координатъ: α, β, γ, λ, μ, ν какого либо луча комплекса $[K, R]$.

Уравненіе (36) имѣющее видъ, не зависящій отъ начала O, можно разсматривать какъ уравненіе того же комплекса. Раздѣливъ его на ρ, мы получимъ уравненіе

$$\Sigma(F, \sigma) = 0,$$

выражающее слѣдующее свойство лучей комплекса:

Алгебраическая сумма объемовъ тетраэдровъ, построенныхъ на каждой силѣ и на произвольномъ отрѣзкѣ, взятомъ на какомъ либо лучѣ, какъ на двухъ противоположныхъ ребрахъ, равна нулю.

65. Одна и та же система силъ: F, F', F'', ... имѣетъ разные главные векторы и разные главные моменты при разныхъ началахъ.

Всѣ главные векторы равны между собою геометрически и различаются только положеніемъ начала; но главные моменты $\overline{K}$ и $\overline{K'}$, соотвѣтствующіе разнымъ началамъ O и O', могутъ различаться по величинѣ и направленію.

Мы видѣли выше (форм. 18), что моменты MF и $M'F$ силы $\overline{F}$ при разныхъ началахъ O и O' связаны условіемъ

$$\overline{M'F} = \overline{MF} - \overline{M(\overline{в'F})}.$$

Примѣнивъ эту формулу къ каждой изъ силъ: $\overline{F}, \overline{F'}, \ldots$ и взявъ геометрическую сумму полученныхъ выводовъ, мы найдемъ, что

$$\Sigma\overline{M'F} = \Sigma\overline{MF} - M\Sigma\overline{в'F},$$

гдѣ $\Sigma\overline{M'F}$ есть главный моментъ $\overline{K'}$ при началѣ O', $\Sigma\overline{MF}$ — главный моментъ при началѣ O, а $\Sigma\overline{M(\overline{в'F})} = M\Sigma\overline{в'F}$ — моментъ при началѣ O геометрической суммы всѣхъ векторовъ, соотвѣтствующихъ началу O', т. е. моментъ относительно O главнаго вектора $\overline{R'}$, соотвѣтствующаго началу O'; слѣд.

$$\overline{K'} = \overline{K} - \overline{MR'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

Кромѣ того имѣемъ

$$\overline{R'} = \overline{R}.$$

Перемноживъ геометрически эти два равенства, мы получимъ

$$\overline{K'}\overline{R'} = \overline{K}\overline{R} - \overline{MR'}.\overline{R}.$$

По перпендикулярности $\overline{MR'}$ къ $\overline{R}$ второй членъ исчезаетъ; слѣд.

$$\overline{K'}\overline{R'} = \overline{K}\overline{R} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

Это равенство показываетъ, что *геометрическое произведеніе главнаго вектора и главнаго момента не зависитъ отъ положенія точки, взятой за начало этихъ аргументовъ;* поэтому можно назвать такое геометрическое произведеніе *инварьянтомъ данной системы силъ.*

Инварьянтъ системы силъ зависитъ: *отъ величинъ силъ, отъ ихъ направленій и отъ расположенія относительнаго тѣхъ прямыхъ, по которымъ направлены силы.*

Эта зависимость выражается формулою

$$\overline{RK} = \Sigma FF'\left(\frac{F}{F'}\right), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

которая получается слѣдующимъ образомъ: перемножимъ геометрически величины

$$\overline{R} = \Sigma \overline{\theta F}, \quad \overline{K} = \Sigma \overline{MF}$$

и въ произведеніе

$$\overline{RK} = \Sigma\Sigma[\overline{\theta F.MF'} + \overline{\theta F'.MF}]$$

гдѣ $\Sigma\Sigma$ означаетъ сумму, распространенную на всѣ силы, взятыя попарно, подставимъ вмѣсто двучлена

$$\overline{\theta F.MF'} + \overline{\theta F'.MF}$$

равную ему величину $FF'\left(\frac{F}{F'}\right)$ (см. форм. (14)).

Формула (39) показываетъ, что *инварьянтъ системы силъ равенъ суммѣ произведеній каждыхъ двухъ силъ на относительный моментъ прямыхъ, по которымъ направлены эти силы.*

Раздѣливъ ур. (39) на 6, мы найдемъ, что

$$\frac{1}{6}\overline{RK} = \Sigma\Sigma(F, F'),$$

т. е. что *шестая часть инварьянта равна алгебраической суммѣ объемовъ тетраедровъ, построенныхъ на каждыхъ двухъ силахъ какъ на противоположныхъ ребрахъ.*

Раздѣливъ инварьянтъ

$$\overline{RK} = RK \cos (RK)$$

на R, мы получимъ $K \cos (KR)$, — проекцію главнаго момента на главномъ векторѣ. Эта проекція также не зависитъ отъ начала векторовъ и моментовъ. Формула (34) даетъ

$$K \cos (KR) = \Sigma F\left(\frac{F}{R}\right)$$

слѣд. *проекція главнаго момента на главномъ векторѣ равна суммѣ моментовъ силъ относительно главнаго вектора т. е. суммѣ произведеній силъ на соотвѣтственные относительные моменты главнаго вектора и прямыхъ, по которымъ направлены силы.*

По той же формулѣ имѣемъ

$$\frac{1}{6}\overline{RK} = \Sigma(R,\ F)$$

т. е. *шестая часть инварьянта равна суммѣ объемовъ тетраедровъ, въ которыхъ одно общее ребро есть главный векторъ, а противоположныя ему ребра — данныя силы.*

Величина проекціи главнаго момента на главномъ векторѣ представляетъ самое меньшее (minimum minimorum) изъ всѣхъ значеній, которыя имѣетъ главный моментъ при разныхъ началахъ; потому что

$$\pm K' \cos (K'R) \leqslant K' \text{ или } \pm K \cos (KR) < K'$$

при всякомъ началѣ O'; кромѣ того $K' = \pm K \cos (KR)$ когда $\cos (K'R') = \pm 1$; слѣд. *когда главный векторъ и главный моментъ направлены по одной прямой линіи, тогда главный моментъ получаетъ самое меньшее значеніе, которое равно величинѣ проекціи какого либо главнаго момента на главномъ векторѣ*, или, *равно численной величинѣ инварьянта* ($\pm \overline{RK}$), *раздѣленной на главный векторъ.*

Прямая, по которой направленъ самый меньшій главный моментъ, называется *центральною осью системы силъ.* Она есть также ось линейнаго комплекса $[K,\ R]$ (см. Кинем. § 177).

Опредѣливъ $\overline{R}$ и $\overline{K}$ для какого либо начала O, можно построить эту ось по способу, показанному въ § 177 Кинематики.

Такъ какъ по центральной оси долженъ быть направленъ новый главный векторъ $\overline{R'}$, то аргументы этой прямой при началѣ O суть: $eR' = R$ и MR'. Первый аргументъ извѣстенъ; найдемъ второй: по формулѣ (37) имѣемъ

$$\overline{MR'} = \overline{K} - \overline{K'};$$

кромѣ того MR' перпендикуляренъ къ самому меньшему главному моменту $\overline{K'}$, потому что $\overline{K'}$ и $\overline{R'}$ направлены по одной прямой. А такъ какъ $K' = \pm K \cos(KR)$, то MR' есть проекція главнаго момента $\overline{K}$ на перпендикулярѣ къ $\overline{R}$, проведенномъ чрезъ начало O въ плоскости прямыхъ $\overline{R}$ и $\overline{K}$; слѣд.

$$MR' = K \sin(KR).$$

Зная аргументы eR' и MR', мы опредѣлимъ извѣстнымъ образомъ (см. § 180) положеніе $\overline{R'}$ или центральной оси, а именно: возставимъ изъ O перпендикуляръ къ плоскости прямыхъ $\overline{R}$ и $\overline{K}$, равный

$$q = \frac{K \sin(KR)}{R}$$

и направленный вправо для наблюдателя $\overline{R}$, смотрящаго на MR'; потомъ чрезъ конецъ этого перпендикуляра проведемъ прямую, параллельную главному вектору $\overline{R}$. На этой прямой отъ произвольной точки O' надобно отложить векторъ $\overline{R'} = \overline{R}$ и самый меньшій главный моментъ

$$K' = \pm K \cos(KR),$$

въ одну сторону съ $\overline{R'}$, когда $\cos(KR) > 0$ и противоположно, когда $\cos(KR) < 0$. Можетъ случиться, что $\cos(KR) = 0$, т. е. что для нѣкотораго начала главный моментъ перпендикуляренъ къ главному вектору, тогда $\sin(KR) = 1$ и $MR' = \overline{K}$; слѣд. главный векторъ $\overline{R}$ и главный моментъ $\overline{K}$ суть аргументы новаго главнаго вектора $\overline{R'}$; потому по нимъ опредѣлится предыдущимъ построеніемъ положеніе центральной оси. Для всякой точки O', на ней находящейся, главный моментъ K' равенъ нулю.

Наконецъ можетъ случиться, что $R=0$; тогда $R'=0$ и $K'=K$; слѣд. *когда геометрическая сумма всѣхъ силъ равна нулю, тогда главный векторъ, при всякомъ началѣ, равенъ нулю, а главный моментъ не зависитъ отъ начала, ни по величинѣ, ни по направленію.*

Въ этомъ случаѣ можно взять за центральную ось всякую прямую параллельную главному моменту $\overline{K}$.

65. Уравненія центральной оси можно получить слѣдующимъ образомъ:

Означимъ чрезъ ξ, η, ζ координаты какой нибудь точки этой прямой, относительно осей Ox, Oy, Oz и вычислимъ по формуламъ (28) проекціи $\overline{R}$ на этихъ осяхъ:

$$A = \Sigma X,\ B = \Sigma Y,\ C = \Sigma Z$$

и проекціи $\overline{K}$:

$$L = \Sigma \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix},\quad M = \Sigma \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix},\quad N = \Sigma \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix};$$

потомъ, разсматривая точку (ξ, η, ζ) какъ начало O' главнаго вектора $\overline{R'}$, составимъ проекціи на осяхъ Ox, Oy, Oz момента $M\overline{R'}$:

$$\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ B & C \end{vmatrix} = C\eta - B\zeta$$

$$\begin{vmatrix} \zeta & \xi \\ C & A \end{vmatrix} = A\zeta - C\xi$$

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta \\ A & B \end{vmatrix} = B\xi - A\eta$$

Вычтя послѣднія выраженія соотвѣтственно изъ L, M, N, мы получимъ величины:

$$L - C\eta + B\zeta,\quad M - A\zeta + C\xi,\quad N - B\xi + A\eta \ldots (40)$$

проекцій на осяхъ Ox, Oy, Oz самаго меньшаго главнаго момента $\overline{K'}$ (см. форм. 37). Такъ какъ $\overline{K'}$ и $\overline{R'}$ направлены по одной прямой, притомъ $\overline{R'} = \overline{R}$, то проекціи $\overline{K'}$ пропорціональны проекціямъ $\overline{R}$; слѣд.

$$\frac{L - C\eta + B\zeta}{A} = \frac{M - A\zeta + C\xi}{B} = \frac{N - B\xi + A\eta}{C} = \pm \frac{K'}{R} \ldots (41)$$

Эти пропорціи суть уравненія центральной оси. Можно ихъ замѣнить уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} L - C\eta + B\zeta &= \pm \frac{K'A}{R} \\ M - A\zeta + C\xi &= \pm \frac{K'B}{R} \\ N - B\xi + A\eta &= \pm \frac{K'C}{R} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (42)$$

Кромѣ того имѣемъ

$$R = R' = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

для опредѣленія главнаго вектора и выраженіе инварьянта

$$\overline{RK} = AL + BM + CN;$$

отсюда выводимъ выраженіе самаго меньшаго момента:

$$K' = \pm \frac{\overline{RK}}{R} = \pm \frac{AL + BM + CN}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Если самый меньшій моментъ равенъ нулю, то

$$AL + BM + CN = 0$$

и ур. (41) приводятся къ слѣдующимъ

$$\left.\begin{aligned} L - C\eta + B\zeta &= 0 \\ M - A\zeta + C\xi &= 0 \\ N - B\xi + A\eta &= 0 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (43)$$

Можно получить выраженіе самаго меньшаго момента и уравненія центральной оси, отыскивая по общему правилу значенія *minimum* для главнаго момента. Величины (40) суть проекціи главнаго момента K' при началѣ въ произвольной точкѣ O' (ξ, η, ζ); поэтому

$$\begin{aligned} K'^2 = (L - C\eta + B\zeta)^2 \\ + (M - A\zeta + C\xi)^2 \\ + (N - B\xi + A\eta)^2 \end{aligned}$$

Условія *max.* или *minim.* для K'^2 заключаются въ уравненіяхъ:

$$\frac{dK'^2}{d\xi}=0,\ \frac{dK'^2}{d\eta}=0,\ \frac{dK'^2}{d\zeta}=0,$$

т. е.

$$(M-A\zeta+C\xi)\,C-(N-B\xi+A\eta)\,B=0,$$

$$(N-B\xi+A\eta)\,A-(L-C\eta+B\zeta)\,C=0,$$

$$(L-C\eta-B\zeta)\,B-(M-A\zeta+C\xi)\,A=0,$$

которыя приводятся къ пропорціямъ (40):

$$\frac{L-C\eta+B\zeta}{A}=\frac{M-A\zeta+C\xi}{B}=\frac{N-B\xi+A\eta}{C},$$

изъ которыхъ вытекаетъ пропорція

$$\frac{K'^2}{AL+BM+CN}=\frac{AL+BM+CN}{A^2+B^2+C^2};$$

откуда выводимъ

$$K'=\pm\frac{AL+BM+CN}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Легко видѣть, что извѣстныя условія *minim.* для K'^2 удовлетворены и что K'^2, какъ положительная квадратичная функція, не можетъ имѣть ни *maximum*, ни другаго *minim.*; слѣд. найденное выраженіе для K' есть самое меньшее (minimum minimorum).

ГЛАВА IV.

Равновѣсіе системы силъ, приложенныхъ къ неизмѣняемой системѣ точекъ. Способы для опредѣленія такой системы силъ.

66. Условія необходимыя и достаточныя для равновѣсія системы силъ: $\overline{F}$, $\overline{F'}$,.... дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему точекъ выражаются шестью уравненіями (30) предъидущей главы, которымъ можно дать видъ линейныхъ функцій относительно величинъ силъ F, F',... съ коеффиціентами, которые зависятъ только отъ положеній прямыхъ, по которымъ направлены силы.

Означимъ вообще чрезъ $a^{(i)}$, $b^{(i)}$, $c^{(i)}$ проекціи на осяхъ координатъ: Ox, Oy, Oz, отрѣзка равнаго единицѣ длины, взятаго на прямой, по которой направлена сила $\overline{F^{(i)}}$, а чрезъ $\lambda^{(i)}$, $\mu^{(i)}$, $\nu^{(i)}$ проекціи момента этого отрѣзка. Можно разсматривать шесть величинъ

$$a^{(i)},\ b^{(i)},\ c^{(i)},\ \lambda^{(i)},\ \mu^{(i)},\ \nu^{(i)}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

какъ лучевыя координаты прямой, по которой направлена сила $\overline{F^{(i)}}$. Произведенія

$$a^{(i)}F^{(i)},\ b^{(i)}F^{(i)},\ c^{(i)}F^{(i)},$$

выражаютъ проекціи вектора $\mathfrak{e}F^{(i)}$, а

$$\lambda^{(i)}F^{(i)},\ \mu^{(i)}F^{(i)},\ \nu^{(i)}F^{(i)}$$

проекціи момента $MF^{(i)}$ на осяхъ Ox, Oy, Oz, съ + или —, смотря потому будутъ ли сила $F^{(i)}$ и отрѣзокъ равный единицѣ, взятой на

прямой, по которой направлена сила $F^{(i)}$, обращены въ одну сторону или противоположно. Для избѣжанія двойственности знака, мы допустимъ, что $F^{(i)}$ означаетъ въ первомъ случаѣ величину силы съ $+$, а во второмъ эту величину съ $-$.

Поэтому ур. (30) могутъ быть представлены подъ видомъ:

$$\Sigma aF=0,\ \Sigma bF=0,\ \Sigma cF=0,\ \Sigma\lambda F=0,\ \Sigma\mu F=0,\ \Sigma\nu F=0\ldots(2)$$

Прямую, которой принадлежатъ координаты (1), т. е. по которой направлена сила $F^{(i)}$, мы будемъ означать чрезъ $(i+1)$.

Когда число всѣхъ силъ, которое означимъ чрезъ n, меньше шести, тогда прямыя: (1), (2)... (n), обусловлены тѣмъ, что ихъ лучевыя координаты вида (1) должны удовлетворять $6-n+1$ уравненіямъ, полученнымъ отъ исключенія величинъ всѣхъ силъ F, F',... изъ ур. (2), а именно: уравненіямъ, которыя получимъ, приравнявъ нулю опредѣлители порядка n, составленные изъ элементовъ, принадлежащихъ шести строкамъ таблицы:

$$\begin{vmatrix} aa'a''\ldots a^{(n-1)} \\ bb'b''\ldots b^{(n-1)} \\ cc'c''\ldots c^{(n-1)} \\ \lambda\lambda'\lambda''\ldots\lambda^{(n-1)} \\ \mu\mu'\mu''\ldots\mu^{(n-1)} \\ \nu\nu'\nu''\ldots\nu^{(n-1)} \end{vmatrix}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Каждое такое уравненіе имѣетъ линейный однородный видъ относительно координатъ прямой (n): $a^{(n-1)}$, $b^{(n-1)}$,... съ коэффиціентами, зависящими отъ координатъ остальныхъ прямыхъ (1), (2).... $(n-1)$; поэтому, если послѣднія прямыя даны, то для опредѣленія координатъ неизвѣстной прямой (n), мы будемъ имѣть $6-n+1$ линейныхъ уравненій, принадлежащихъ такому же числу линейныхъ комплексовъ; слѣд. искомая прямая (n) обусловлена тѣмъ, что она должна быть общимъ лучемъ $6-n+1$ линейныхъ комплексовъ.

Данныя прямыя (1), (2).. $(n-1)$ суть также общіе лучи тѣхъ же комплексовъ; потому что, если подставимъ въ уравненіе какого либо изъ этихъ комплексовъ вмѣсто $a^{(n-1)}$, $b^{(n-1)}$,.... соотвѣтственныя координаты одной изъ данныхъ прямыхъ, то первая часть уравненія сдѣлается опредѣлителемъ, въ которомъ два столбца будутъ имѣть соотвѣтственно равные элементы; такой опредѣлитель тожественно равенъ нулю.

Изъ этого слѣдуетъ, что *для равновѣсія силъ, число которыхъ n не больше шести, необходимо и достаточно, чтобы прямыя, по которымъ направлены силы, были общими лучами* $6-n+1$ *линейныхъ комплексовъ.*

Опредѣливъ прямыя, удовлетворяющія такому условію, и подставивъ ихъ координаты вида (1) въ ур. (2), мы будемъ имѣть 6 линейныхъ однородныхъ уравненій съ неизвѣстными: F, F',.... Взявъ между ними $n-1$ уравненій, можно получить изъ нихъ отношенія всѣхъ силъ къ одной, напр.

$$\frac{F'}{F}, \frac{F''}{F}, \ldots \frac{F^{(n-1)}}{F}.$$

Взявъ для силы $\overline{F}$ произвольную величину и направивъ ее по прямой (1) въ одну сторону съ отрѣзкомъ $(a, b, c, \lambda, \mu, \nu)$, мы потомъ по отношенію $\frac{F^{(i)}}{F}$ найдемъ $F^{(i)}$ т. е. величину силы $\overline{F^{(i)}}$ съ $+$ или $-$. Длину, представляющую эту величину, должно направить по прямой $(i+1)$, въ одну сторону съ отрѣзкомъ $(a^{(i)}, b^{(i)}, c^{(i)}, \lambda^{(i)}, \mu^{(i)}, \nu^{(i)})$, когда $F^{(i)}$ имѣетъ знакъ $+$, и противоположно, когда этотъ знакъ есть $-$.

Кромѣ $6-n+1$ комплексовъ, уравненія которыхъ суть опредѣлители порядка (n), составленные изъ элементовъ строкъ (3) и приравненные нулю, есть въ случаѣ $n < 6$ безчисленное множество, другихъ комплексовъ, имѣющихъ лучами прямыя: (1), (2)..... (n). Вообще, чтобы получить уравненіе такого комплекса, надобно $n-6+1$ опредѣлителей порядка n, составленныхъ изъ строкъ (3) помножить на произвольные множители и приравнять сумму произведеній нулю.

Можно повѣрить слѣдующимъ образомъ, что всѣ прямыя (1), (2)... (n) суть лучи одного и того же комплекса. Такъ какъ число данныхъ прямыхъ: (1), (2)...(n—1) не больше 5 и линейный комплексъ опредѣляется пятью лучами, то, при всякомъ данномъ положеніи этихъ прямыхъ, можно принять ихъ за лучи нѣкотораго комплекса $[k, \omega]$, что выражается уравненіями:

$$\overline{keF} + \overline{\omega MF} = 0$$

$$\overline{keF'} + \overline{\omega MF'} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\overline{keF^{(n-2)}} + \overline{\omega MF^{(n-2)}} = 0.$$

Условія равновѣсія $\Sigma\overline{eF} = 0$, $\Sigma\overline{MF} = 0$ даютъ

$$k\overline{\Sigma eF} + \omega\overline{\Sigma MF} = 0.$$

Вычтя отсюда всѣ предыдущія уравненія, мы получимъ уравненіе

$$\overline{keF^{(n-1)}} + \overline{\omega MF^{(n-1)}} = 0,$$

показывающее, что прямая (n) есть также лучь комплекса $[k, \omega]$. Въ случаѣ $n < 5$ можно составить безчисленное множество комплексовъ $[k, \omega]$, присоединяя къ даннымъ прямымъ (1), (2)....(n—1) одну или болѣе произвольныхъ, такъ, чтобы всего было 5 лучей для опредѣленія комплекса.

67. Такъ какъ геометрическая сумма $R = \Sigma F$ равна нулю, то сумма проекцій всѣхъ силъ на всякой оси равна нулю. Взявъ для оси проекцій послѣдовательно прямыя: (1), (2)...(n) и положивъ

$$\cos(rs) = a^{(r-1)}a^{(s-1)} + b^{(r-1)}b^{(s-1)} + c^{(r-1)}c^{(s-1)}$$

мы будемъ имѣть уравненія

$$\left.\begin{array}{l} F + F'\cos(21) + F''\cos(31) + \dots F^{(n-1)}\cos(n1) = 0 \\ F\cos(12) + F' + F''\cos(32) + \dots F^{(n-1)}\cos(n2) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F\cos(1n) + F'\cos(2n) + F''\cos(3n) + \dots + F^{(n-1)} = 0 \end{array}\right\}\dots(4)$$

Исключивъ изъ нихъ величины $F, F', \ldots F^{(n-1)}$, мы получимъ уравненіе

$$\begin{vmatrix} 1, \cos(21), \cos(31), \ldots \cos(n1) \\ \cos(21), 1, \cos(32), \ldots \cos(n2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cos(1n), \cos(2n), \cos(3n), \ldots 1 \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots (5)$$

въ которомъ первая часть есть опредѣлитель, составленный по правилу перемноженія опредѣлителей изъ элементовъ столбцовъ двухъ тожественныхъ таблицъ, составленныхъ изъ трехъ первыхъ строкъ таблицы (3), что можно изобразить символически такъ:

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2, & aa'+bb'+cc', \ldots \\ a'a+b'b+c'c, & a'^2+b'^2+c'^2 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aa'a'' \ldots a^{(n-1)} \\ bb'b'' \ldots b^{(n-1)} \\ cc'c'' \ldots c^{(n-1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} aa'a'' \ldots a^{(n-1)} \\ bb'b'' \ldots b^{(n-1)} \\ cc'c'' \ldots c^{(n-1)} \end{vmatrix} \ldots (6)$$

Такое произведеніе обращается тожественно въ нуль, когда $n > 3$; слѣд. ур. (5) обусловливаетъ углы между силами только въ случаѣ $n \leqslant 3$. Разсматриваемый опредѣлитель есть симметрическій, а потому, если означимъ его чрезъ D, а производную его относительно элемента строки r-вой и столбца s-ва, то будемъ имѣть $D_{rs}{}^2 = D_{rr}D_{ss}$. Въ случаѣ $n-1 > 3$ главные младшіе опредѣлители D_{rr} равны нулю, а потому и всѣ D_{rs} равны нулю. Если же $n-1 \leqslant 3$, т. е. $n \leqslant 4$, то D_{rr} вообще не равны нулю и ур. (4) приводятся къ пропорціямъ:

$$F : F' : F'' : \ldots F^{(n-1)} = D_{r1} : D_{r2} : D_{r3} : \ldots D_{rn} \ldots\ldots (7)$$

Вслѣдствіе $D_{rs}{}^2 = D_{rr}D_{ss}$ всѣ главные младшіе опредѣлители: D_{11}, $D_{22}, \ldots D_{nn}$ имѣютъ одинаковый знакъ. А такъ какъ D_{11} выражается по формулѣ (6), то онъ есть квадратъ или сумма квадратовъ; слѣд. не можетъ быть отрицательнымъ; поэтому, если опредѣлители $D_{11}, D_{22}, \ldots D_{nn}$ не равны нулю, то они всѣ положительные. Помощію ур. $D_{rs}{}^2 = D_{rr}D_{ss}$ пропорціи (7) могутъ быть замѣнены слѣдующими:

$$\epsilon F : \epsilon F' : \ldots \epsilon F^{(n-1)} = \sqrt{D_{11}} : \sqrt{D_{22}} : \ldots \sqrt{D_{nn}} \ldots\ldots (8)$$

Можно получить другую систему пропорцій для опредѣленія отношеній между силами.

Возьмемъ въ ур. (35) предъидущей главы для $\overline{\sigma}$ отрѣзки, равные единицѣ, на прямыхъ (1) (2).... (n) и означимъ чрезъ $\binom{r}{s}$ относительный моментъ отрѣзковъ, взятыхъ на прямыхъ (r) и (s); отъ этого мы получимъ уравненія:

$$\left.\begin{array}{l} 0 + \binom{2}{1}F' + \binom{3}{1}F'' + \ldots\ldots\binom{n}{1}F^{(n-1)} = 0 \\ \binom{1}{2}F + 0 + \binom{3}{2}F'' + \ldots\ldots\binom{n}{2}F^{(n-1)} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \binom{1}{n}F + \binom{2}{n}F' + \binom{3}{n}F'' + \ldots\ldots 0 = 0 \end{array}\right\}\ldots\ldots(9)$$

Исключивъ изъ нихъ величины силъ, мы найдемъ уравненіе

$$\begin{vmatrix} 0, \binom{2}{1}, \binom{3}{1}, \ldots\binom{n}{1} \\ \binom{1}{2}, 0, \binom{3}{2}, \ldots\binom{n}{2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \binom{1}{n}, \binom{2}{n}, \binom{3}{n} \ldots 0 \end{vmatrix} = 0\ldots\ldots\ldots(10)$$

гдѣ первая часть, которую означимъ чрезъ Δ, есть опредѣлитель, составленный изъ элементовъ вида

$$\binom{r}{s} = a^{(r-1)}\lambda^{(s-1)} + b^{(r-1)}\mu^{(s-1)} + c^{(r-1)}\nu^{(s-1)} + \lambda^{(r-1)}a^{(s-1)} + \mu^{(r-1)}b^{(s-1)} + \nu^{(r-1)}c^{(s-1)}\text{*)}$$

Онъ получается по правилу умноженія опредѣлителей изъ элементовъ двухъ таблицъ

*) По формулѣ (14) § 59 мы имѣемъ:

$$F^{(r-1)}F^{(s-1)}\binom{F^{(r-1)}}{F^{(s-1)}} = \overline{\epsilon F^{(r-1)}.MF^{(s-1)}} + \overline{MF^{(r-1)}.\epsilon F^{(s-1)}}$$

или

$$\pm F^{(r-1)}F^{(s-1)}\binom{r}{s} = \pm[a^{(r-1)}\lambda^{(s-1)} + b^{(r-1)}\mu^{(s-1)} + c^{(r-1)}\nu^{(s-1)} + \lambda^{(r-1)}a^{(s-1)} + \mu^{(r-1)}b^{(s-1)} + \nu^{(r-1)}c^{(s-1)}]F^{(r-1)}F^{(s-1)}$$

отсюда, раздѣливъ на $\pm F^{(r-1)}F^{(s-1)}$, получимъ выраженіе $\binom{r}{s}$.

$$\begin{vmatrix} aa'a''\ldots a^{(n-1)} \\ bb'b''\ldots b^{(n-1)} \\ cc'c''\ldots c^{(n-1)} \\ \lambda\lambda'\lambda''\ldots\lambda^{(n-1)} \\ \mu\mu'\mu''\ldots\mu^{(n-1)} \\ \nu\nu'\nu''\ldots\nu^{(n-1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda\lambda'\lambda''\ldots\lambda^{(n-1)} \\ \mu\mu'\mu''\ldots\mu^{(n-1)} \\ \nu\nu'\nu''\ldots\nu^{(n-1)} \\ aa'a''\ldots a^{(n-1)} \\ bb'b''\ldots b^{(n-1)} \\ cc'c''\ldots c^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

перемноженныхъ столбцами.

Когда $n > 6$, опредѣлитель Δ тожественно равенъ нулю и слѣд. ур. (8) не даетъ никакого условія для относительныхъ моментовъ (^r_s). Въ случаѣ же $n \leqslant 6$ опредѣлитель Δ есть сумма произведеній, полученныхъ отъ умноженія всѣхъ опредѣлителей порядка n, составленныхъ изъ строкъ первой таблицы, на опредѣлители того же порядка, составленные изъ соотвѣтственныхъ строкъ второй таблицы; но условія равновѣсія силъ, какъ мы видѣли въ § 66 требуютъ, чтобы всѣ эти опредѣлители порядка n были равны нулю; слѣд. ур. $\Delta = 0$ есть слѣдствіе другихъ условій, которымъ должны удовлетворять прямыя (1), (2)....(n), указанныхъ въ § 66.

Опредѣлитель Δ есть симметрическій, а потому, означая чрезъ Δ_{rs} его производную относительно элемента строки r-вой и столбца s-ва, имѣемъ $\Delta_{rs} = \Delta_{sr}$ и $\Delta_{rs}^2 = \Delta_{rr}\Delta_{ss}$.

Когда $n - 1 > 6$, тогда всѣ Δ_{rr} и Δ_{rs} тожественно равны нулю. А въ случаѣ $n - 1 \leqslant 6$, не всѣ Δ_{rs} вообще равны нулю и можно привести ур. (7) къ пропорціямъ:

$$F : F' : F'' \ldots F^{(n-1)} = \Delta_{r1} : \Delta_{r2} : \Delta_{r3} \ldots \Delta_{rn}$$

или

$$\theta F : \theta F' : \ldots \theta F^{(n-1)} = \sqrt{\Delta_{11}} : \sqrt{\Delta_{22}} : \ldots \sqrt{\Delta_{nn}} \ldots (11)$$

Изъ ур. (35) предъидущей главы вытекаетъ еще слѣдующее замѣчательное свойство прямыхъ (1), (2)....(n):

Если n силъ находятся въ равновѣсіи, то всякая прямая, пересѣкающая прямыя, направляющія $n - 1$ силъ, пересѣкаетъ и прямую, по которой направлена остальная сила.

Въ самомъ дѣлѣ, если прямая $\overline{\sigma}$ пересѣкаетъ прямыя (1), (2)... (n — 1), то мы будемъ имѣть

$$\binom{F}{\sigma}=0,\ \binom{F'}{\sigma}=0,\ldots\binom{F^{(n-1)}}{\sigma}=0;$$

отъ этого ур. (35) приведется къ одночленному

$$F^{(n-1)}\binom{F^{(n-1)}}{\sigma}=0,$$

требующему, чтобы относительный моментъ $\binom{F^{n-1}}{\sigma}$ былъ равенъ нулю, для чего $\overline{\sigma}$ должна пересѣкать прямую (n) на конечномъ или безконечномъ разстояніи.

68. Разсмотримъ теперь обстоятельно всѣ случаи равновѣсія силъ, когда $n < 6$.

1. $n = 2$. Опредѣлить двѣ силы $\overline{F}$ и $\overline{F'}$ такъ, чтобы онѣ были въ равновѣсіи и чтобы сила $\overline{F}$ была направлена по данной прямой (1).

По условію, что главный векторъ $R = \Sigma вF$ и $K = \Sigma MF$ равны нулю, имѣемъ

$$\overline{вF} + \overline{вF'} = 0,\ \overline{MF} + \overline{MF'} = 0,$$

а потому

$$\overline{вF'} = -\overline{вF},\ \overline{MF'} = -\overline{MF};$$

для этого необходимо и достаточно, чтобы силы $\overline{F}$ и $\overline{F'}$ были равны, противоположны и направлены по одной прямой (1); приэтомъ точки приложенія силъ остаются произвольны.

Необходимость, чтобы силы были направлены по прямой (1) или чтобы прямая (2) совпадала съ прямою (1) вытекаетъ также изъ того, что всякая прямая $\overline{\sigma}$, пересѣкающая данную (1), должна пересѣкать и прямую (2). Найденное условіе равновѣсія двухъ силъ, приложенныхъ къ совершенно твердому тѣлу, принимается обыкновенно за основную аксіому въ статикѣ твердаго тѣла.

Изъ строкъ таблицы (3) можно составить пять независимыхъ опредѣлителей втораго порядка; приравнявъ ихъ нулю, мы получимъ уравненія, связывающія координаты прямыхъ (1) и (2), а именно:

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a & a' \\ \lambda & \lambda' \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a & a' \\ \mu & \mu' \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a & a' \\ \nu & \nu' \end{vmatrix} = 0 \text{ *)}.$$

Эти уравненія выражаютъ очевидно совпаденіе прямыхъ (1) и (2) въ одну.

2. $n = 3$. Опредѣлить три силы $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$ такъ, чтобы онѣ были въ равновѣсіи и чтобы двѣ изъ нихъ $\overline{F}$ и $\overline{F'}$ были направлены по даннымъ прямымъ (1) и (2).

Всякая прямая $\overline{\sigma}$, пересѣкающая прямыя (1) и (2) должна пересѣкать и прямую (3); для этого необходимо, чтобы всѣ три прямыя лежали въ одной плоскости и встрѣчались бы въ одной точкѣ, на конечномъ или безконечномъ разстояніи; слѣд. рѣшеніе вопроса возможно, когда даны прямыя (1) и (2) въ одной плоскости.

Допустивъ это, можно взять для прямой (3) всякую прямую въ плоскости данныхъ прямыхъ, проходящую чрезъ точку ихъ пересѣченія, но съ ними не совпадающую. Если точка встрѣчи O находится на конечномъ разстояніи, то можно опредѣлить величины силъ слѣдующимъ образомъ:

Возьмемъ на прямой (1) произвольную длину $\overline{F}$ и ей равную и противоположную OA, которую разложимъ на двѣ слагаемыя OB и OC, направленныя по прямымъ (2) и (3); послѣ того отложимъ на прямой (2) отъ произвольной точки длину $\overline{F'}$ геометрически равную OB и на прямой (3) отъ произвольной точки длину геометрически равную $\overline{F}C$. Три длины $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$ будутъ представлять три силы, удовлетворяющія всѣмъ требованіямъ вопроса.

Когда точка пересѣченія данныхъ прямыхъ (1) и (2) въ безконечности, т. е. прямыя параллельны, тогда для (3) можно взять произвольную прямую, имъ параллельную и лежащую съ ними въ одной плоскости. Взявъ по направленію прямой (1) произвольную силу $\overline{F}$, можно опредѣлить остальныя двѣ на основаніи условій: $\Sigma \overline{\sigma F} = 0$, $\Sigma \overline{MF} = 0$. Взявъ начало моментовъ въ какой нибудь точкѣ A на прямой (1) мы будемъ имѣть $MF = 0$ и слѣд. $\overline{MF'} + \overline{MF''} = 0$, или $\overline{MF''} = -\overline{MF'}$, т. е. моменты двухъ искомыхъ силъ должны

*) Здѣсь предполагается, что обѣ величины a и a' неравны нулю.

быть равны и противоположны; для этого необходимо, чтобы силы $\overline{F'}$ и $\overline{F''}$, будучи направлены по прямымъ (2) и (3) дѣйствовали бы: въ одну сторону, если прямая (1) лежитъ между (2) и (3), и противоположно, если прямыя (2) и (3) лежатъ по одну сторону относительно (1). Кромѣ того въ обоихъ случаяхъ величины силъ $\overline{F'}$ и $\overline{F''}$ должны быть обратно пропорціональны ихъ плечамъ, т. е. разстояніямъ прямой (1) отъ прямыхъ (2) и (3). Наконецъ условіе $\Sigma e\overline{F}=0$ требуетъ, чтобы въ первомъ случаѣ было $F=F'+F''$, а во второмъ: $F=F'-F''$ или $F=F''-F'$, смотря потому, которая изъ двухъ прямыхъ (2) и (3) ближе къ (1), первая или вторая.

Уравненіе (5):

$$\begin{vmatrix} 1, \cos(12), \cos(13) \\ \cos(21), 1, \cos(23) \\ \cos(31), \cos(32), 1 \end{vmatrix} = 0$$

выражаетъ условіе, что векторы трехъ силъ eF, eF', eF'' должны лежать въ одной плоскости. Легко видѣть, что

$$D_{11}=\sin^2(23),\ D_{22}=\sin^2(13),\ D_{33}=\sin^2(12),$$

а потому пропорція (8) приводится къ слѣдующимъ:

$$eF : eF' : eF'' = \sin(23) : \sin(13) : \sin(12).$$

Въ случаѣ параллельности прямыхъ (1), (2), (3) пропорціи (8) берутъ неопредѣленный видъ, потому что $D_{11}=0$, $D_{22}=0$, $D_{33}=0$. Тогда ур. (4) приводятся къ одному

$$F+F'+F''=0,$$

причемъ F, F', F'' означаютъ положительныя или отрицательныя величины.

Уравненіе (10) приводится къ слѣдующему

$$2\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)=0,$$

которое требуетъ, чтобы одинъ изъ относительныхъ моментовъ

$$\left(\tfrac{1}{2}\right), \left(\tfrac{1}{3}\right), \left(\tfrac{2}{3}\right)$$

былъ равенъ нулю, а ур. (8) показываютъ, что, если одинъ изъ этихъ моментовъ равенъ нулю, то равны нулю и прочіе. Это значитъ, что всѣ три прямыя (1), (2), (3) должны находиться въ одной плоскости.

Приравнявъ нулю четыре независимые опредѣлителя 3-го порядка, составленные изъ строкъ таблицы (3) мы получимъ четыре уравненія, связывающія координаты прямыхъ (1), (2), (3). Таковы уравненія:

$$\begin{vmatrix} aa'a'' \\ bb'b'' \\ cc'c'' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \lambda\lambda'\lambda'' \\ bb'b'' \\ cc'c'' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} aa'a'' \\ \mu\mu'\mu'' \\ cc'c'' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} aa'a'' \\ bb'b'' \\ \nu\nu'\nu'' \end{vmatrix} = 0$$

Легко видѣть, что первое изъ нихъ выражаетъ условіе, что прямыя (1), (2), (3) лежатъ въ одной плоскости, а прочія, что эти прямыя встрѣчаются въ одной точкѣ.

3. $n = 4$. Опредѣлить четыре силы $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$, $\overline{F'''}$ такъ, чтобы онѣ были въ равновѣсіи и чтобы первыя три были направлены по даннымъ прямымъ (1), (2), (3).

Всякая прямая (A), пересѣкающая прямыя (1), (2), (3), должна пересѣкать и прямую (4); для этого прямая (4) должна лежать всѣми точками на линейчатомъ гиперболоидѣ (H), произведенномъ движеніемъ прямой (A) по тремъ направляющимъ (1), (2), (3); слѣд. прямыя: (1), (2), (3), (4) должны представлять четыре положенія производящей втораго рода этого гиперболоида *).

Построивъ на основаніи этого свойства прямую (4) должно опредѣлить величины силъ. Для этого чрезъ произвольную точку O проведемъ прямыя $(1)'$, $(2)'$, $(3)'$, $(4)'$, параллельныя соотвѣтственно прямымъ (1), (2), (3), (4); за тѣмъ отложимъ на прямой $(1)'$ произвольную длину OA, которую примемъ за векторъ силы $\overline{F}$; потомъ равную и противоположную ей длину OB разложимъ на три слагаемыя OA', OA'', OA''', направленныя по прямымъ $(2)'$, $(3)'$, $(4)'$: четыре длины: OA, OA', OA'', OA''' будутъ векторы искомыхъ силъ, а длины имъ геометрически

*) Это свойство прямыхъ, по которымъ должны быть направлены четыре силы, находящіяся въ равновѣсіи, найдено Мöбіусомъ.

равныя, отложенныя на прямыхъ (1), (2), (3), (4) изобразятъ самыя силы: F, F', F'', F'''.

Отношенія между векторами получаются изъ пропорцій (8),

$$\text{в}F : \text{в}F' : \text{в}F'' : \text{в}F''' = \sqrt{D_{11}} : \sqrt{D_{22}} : \sqrt{D_{33}} : \sqrt{D_{44}}$$

или изъ пропорцій (11)

$$\text{в}F : \text{в}F' : \text{в}F'' : \text{в}F''' = \sqrt{\Delta_{11}} : \sqrt{\Delta_{22}} : \sqrt{\Delta_{33}} : \sqrt{\Delta_{44}},$$

гдѣ

$$\Delta_{11} = 2\binom{2}{3}\binom{2}{4}\binom{3}{4}$$

$$\Delta_{22} = 2\binom{1}{3}\binom{1}{4}\binom{3}{4}$$

$$\Delta_{33} = 2\binom{1}{2}\binom{1}{4}\binom{2}{4}$$

$$\Delta_{44} = 2\binom{1}{2}\binom{1}{3}\binom{2}{3}.$$

Послѣднію пропорцію можно представить подъ видомъ

$$\left.\begin{aligned} \text{в}F : \text{в}F' &= \sqrt{\left[\binom{2}{3}\binom{2}{4}\right] : \left[\binom{1}{3}\binom{1}{4}\right]} \\ \text{в}F' : \text{в}F'' &= \sqrt{\left[\binom{1}{3}\binom{3}{4}\right] : \left[\binom{1}{2}\binom{2}{4}\right]} \\ \text{в}F'' : \text{в}F''' &= \sqrt{\left[\binom{1}{4}\binom{2}{4}\right] : \left[\binom{1}{3}\binom{2}{3}\right]}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Опредѣлитель Δ въ первой части ур. (10) выражается формулою

$$\Delta = \binom{1}{2}^2\binom{3}{4}^2 + \binom{1}{3}^2\binom{2}{4}^2 + \binom{2}{3}^2\binom{1}{4}^2$$
$$- 2\binom{1}{2}\binom{1}{3}\binom{2}{4}\binom{3}{4} - 2\binom{1}{2}\binom{1}{4}\binom{2}{3}\binom{3}{4} - 2\binom{1}{3}\binom{1}{4}\binom{2}{3}\binom{2}{4},$$

которая можетъ быть написана подъ видомъ

$$\Delta = \left[\binom{1}{2}\binom{3}{4} - \binom{1}{3}\binom{2}{4} - \binom{2}{3}\binom{1}{4}\right]^2 - 4\binom{1}{3}\binom{1}{4}\binom{2}{3}\binom{2}{4}.$$

Изъ ур. $\Delta = 0$ слѣдуетъ, что произведеніе

$$\binom{1}{3}\binom{1}{4}\binom{2}{3}\binom{2}{4}$$

не можетъ быть отрицательнымъ, а потому $\binom{1}{3}\binom{1}{4}$ и $\binom{2}{3}\binom{2}{4}$ должны имѣть одинаковые знаки; отъ этого выраженіе, находящееся подъ знакомъ $\sqrt{\ }$ въ первомъ изъ отношеній (12) не можетъ быть отрицательнымъ. То же самое найдемъ и въ прочихъ отношеніяхъ (12).

Предыдущее выраженіе Δ разлагается на четыре множителя:

$$\left[\sqrt{\binom{1}{2}\binom{3}{4}}+\sqrt{\binom{1}{3}\binom{2}{4}}+\sqrt{\binom{2}{3}\binom{1}{4}}\right]\cdot\left[\sqrt{\binom{1}{2}\binom{3}{4}}-\sqrt{\binom{1}{3}\binom{2}{4}}-\sqrt{\binom{2}{3}\binom{1}{4}}\right]$$

$$\left[\sqrt{\binom{1}{2}\binom{3}{4}}+\sqrt{\binom{1}{3}\binom{2}{4}}-\sqrt{\binom{2}{3}\binom{1}{4}}\right]\cdot\left[\sqrt{\binom{1}{2}\binom{3}{4}}-\sqrt{\binom{1}{3}\binom{2}{4}}+\sqrt{\binom{2}{3}\binom{1}{4}}\right]$$

и ур. $\Delta=0$ требуетъ, чтобы по крайней мѣрѣ одинъ изъ этихъ множителей былъ равенъ нулю. Первый, какъ сумма положительныхъ количествъ, не можетъ быть равенъ нулю, когда относительные моменты прямыхъ (1), (2), (3), (4) не равны нулю; слѣд. должно приравнять нулю одинъ изъ прочихъ множителей, напр.

$$\sqrt{\binom{1}{2}\binom{3}{4}}-\sqrt{\binom{1}{3}\binom{2}{4}}-\sqrt{\binom{2}{3}\binom{1}{4}}=0\ldots\ldots\ldots(13)$$

Такимъ образомъ обусловливаются относительные моменты четырехъ прямыхъ (1), (2), (3), (4), которыя должны быть производящія одного рода какого либо линейчатаго гиперболоида (H).

Пусть будутъ (A) и (B) двѣ производящія гиперболоида (H) другаго рода. Означая чрезъ α_1, α_2, α_3, α_4 точки пересѣченія прямой (A) съ прямыми: (1), (2), (3), (4), чрезъ β_1, β_2, β_3, β_4 точки пересѣченія (B) съ тѣми же прямыми и чрезъ $\left(\frac{A}{B}\right)$ относительный моментъ прямыхъ (A) и (B), мы будемъ имѣть:

$$\pm\,\alpha_1\beta_1\cdot\alpha_2\beta_2\binom{1}{2}=\alpha_1\alpha_2\cdot\beta_1\beta_2\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$\pm\,\alpha_1\beta_1\cdot\alpha_3\beta_3\binom{1}{3}=\alpha_1\alpha_3\cdot\beta_1\beta_3\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$\pm\,\alpha_1\beta_1\cdot\alpha_4\beta_4\binom{1}{4}=\alpha_1\alpha_4\cdot\beta_1\beta_4\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$\pm\,\alpha_2\beta_2\cdot\alpha_3\beta_3\binom{2}{3}=\alpha_2\alpha_3\cdot\beta_2\beta_3\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$\pm\,\alpha_2\beta_2\cdot\alpha_4\beta_4\binom{2}{4}=\alpha_2\alpha_4\cdot\beta_2\beta_4\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$\pm\,\alpha_3\beta_3\cdot\alpha_4\beta_4\binom{3}{4}=\alpha_3\alpha_4\cdot\beta_3\beta_4\left(\frac{A}{B}\right)$$

Помощію этихъ уравненій можно выключить изъ пропорцій (12) относительные моменты $\binom{1}{2}$, $\binom{1}{3}$, $\binom{1}{4}$, $\binom{2}{3}$, $\binom{2}{4}$, $\binom{3}{4}$; отъ этого отноше-

нія между силами выразятся въ функціи отрѣзковъ на прямыхъ: (1), (2), (3), (4), (A) и (B).

Первое изъ отношеній (12) приведется къ слѣдующему

$$\theta F : \theta F' = \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_2\beta_2}\left[\frac{\alpha_2\alpha_3.\alpha_2\alpha_4}{\alpha_1\alpha_3.\alpha_1\alpha_4}\cdot\frac{\beta_2\beta_3.\beta_2\beta_4}{\beta_1\beta_3.\beta_1\beta_4}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Но по извѣстному свойству отрѣзковъ, образуемыхъ двумя пересѣкающими на четырехъ производящихъ одного рода какого либо линейчатаго гиперболоида, имѣемъ:

$$\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1\beta_3}\bigg|\frac{\beta_2\beta_4}{\beta_1\beta_4} = \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_3}\bigg|\frac{\alpha_2\alpha_4}{\alpha_1\alpha_4}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

поэтому

$$\frac{\theta F}{\theta F'} = \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_2\beta_2}\cdot\frac{\alpha_2\alpha_3.\alpha_2\alpha_4}{\alpha_1\alpha_3.\alpha_1\alpha_4}$$

$$= \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_2\beta_2}\cdot\frac{\beta_2\beta_3.\beta_2\beta_4}{\beta_1\beta_3.\beta_1\beta_4}$$

Пропорція (13) вытекаетъ изъ ур. $\Delta = 0$ какъ показалъ Мёбіусъ*).

Въ самомъ дѣлѣ: положивъ для сокращенія

$$\alpha_1\alpha_2.\alpha_3\alpha_4 = A_1,\ \alpha_1\alpha_3.\alpha_2\alpha_4 = A_2,\ \alpha_2\alpha_3.\alpha_1\alpha_4 = A_3$$

$$\beta_1\beta_2.\beta_3\beta_4 = B_1,\ \beta_1\beta_3.\beta_2\beta_4 = B_2,\ \beta_2\beta_3.\beta_1\beta_4 = B_3$$

можно представить ур. $\Delta = 0$ подъ видомъ

$$(A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3)^2 - 4A_2B_2A_3B_3 = 0 \ldots\ldots (14)$$

а такъ какъ

$$\alpha_3\alpha_4 = \pm\alpha_1\alpha_4 \pm \alpha_1\alpha_3$$

$$\beta_3\beta_4 = \pm\beta_1\beta_4 \pm \beta_1\beta_3,$$

то

$$A_1 = \pm A_2 \pm A_3$$

$$B_1 = \pm B_2 \pm B_3,$$

при чемъ знаки $\pm$ должны быть одинаковы въ соотвѣтственныхъ членахъ; отъ этого ур. (14) приводится къ слѣдующему

*) Möbius Lehrbuch der Statik. I Theil. S. 186.

$$(A_2B_3 + B_2A_3)^2 - 4A_2B_2A_3B_3 = 0$$

или

$$(A_2B_3 - B_2A_3)^2 = 0;$$

отсюда слѣдуетъ, что

$$A_2B_3 = B_2A_3,$$

а это даетъ пропорцію (13)

$$\frac{B_2}{B_3} = \frac{A_2}{A_3}.$$

Разсмотримъ еще результаты исключенія величинъ силъ изъ шести условій равновѣсія (2). Мы ихъ получимъ, какъ сказано было выше, приравнявъ нулю опредѣлители 4-го порядка, составленные изъ строкъ таблицы (3). Такихъ независимыхъ между собою уравненій будетъ три, которыя можно взять подъ видомъ:

$$\begin{vmatrix} aa'a''a''' \\ bb'b''b''' \\ cc'c''c''' \\ \lambda\lambda'\lambda''\lambda''' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} aa'a''a''' \\ bb'b''b''' \\ cc'a''a''' \\ \mu\mu'\mu''\mu''' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} aa'a''a''' \\ bb'b''b''' \\ cc'c''c''' \\ \nu\nu'\nu''\nu''' \end{vmatrix} = 0,$$

что можно представить подъ видомъ линейныхъ уравненій относительно координатъ искомой прямой (4): a''', b''', c''', λ''', μ''', ν''', а именно:

$$\left.\begin{aligned} Aa''' + Bb''' + Cc''' + L\lambda''' = 0 \\ A'a''' + B'b''' + C'c''' + M\mu''' = 0 \\ A''a''' + B''b''' + C''c''' + N\nu''' = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (15)$$

Каждое изъ этихъ уравненій при перемѣнныхъ значеніяхъ координатъ: a''', b''',... ν''' принадлежитъ линейному комплексу; слѣд. прямая (4) есть общій лучь этихъ комплексовъ.

Общіе же лучи этихъ трехъ комплексовъ суть производящія гиперболоида (H). Къ производящимъ того же рода принадлежатъ и данныя прямыя (1), (2), (3), потому что ихъ координаты удовлетворяютъ ур. (15). Можно ихъ принять за направляющія для образованія гиперболоида (H).

Означая чрезъ x, y, z координаты какой нибудь точки прямой (4), мы будемъ имѣть

$$\lambda''' = c'''y - b'''z,\ \mu''' = a'''z - c'''x,\ \nu''' = b'''x - a'''y \ldots (16)$$

Подставивъ эти величины λ''', μ''', ν''' въ ур. (15), мы получимъ ур.

$$\left.\begin{array}{r} Aa''' + (B - Lz)b''' + (C + Ly)c''' = 0 \\ (A' + Mz)a''' + B'b''' + (C' - Mx)c''' = 0 \\ (A'' - Ny)a''' + (B'' + Nx)b''' + C''c''' = 0, \end{array}\right\} \ldots (17)$$

изъ которыхъ чрезъ исключенiе a''', b''', c''', выводимъ ур. гиперболоида (H):

$$\begin{vmatrix} A, & B - Lz, & C + Ly \\ A' + Mz, & B', & C' - Mx \\ A'' - Ny, & B'' + Nx, & C''' \end{vmatrix} = 0.$$

Присоединивъ къ уравненiямъ (16) условное уравненiе, связывающее координаты прямой,

$$a'''\lambda''' + b'''\mu''' + c'''\nu''' = 0$$

и выключивъ λ''', μ''', ν''', мы найдемъ уравненiе, содержащее только три неизвѣстныя a''', b''', c''':

$$\frac{A}{L}a'''^2 + \frac{B'}{M}b'''^2 + \frac{C''}{N}c'''^2$$

$$+ \left(\frac{C'}{M} + \frac{B''}{N}\right)b'''c''' + \left(\frac{C}{L} + \frac{A''}{N}\right)a'''c''' + \left(\frac{B}{L} + \frac{A'}{M}\right)a'''b''' = 0, \ldots (18)$$

принадлежащее конусу 2-го порядка, вершина котораго есть начало O, а производящiя — прямыя параллельныя тѣмъ производящимъ гиперболоида (H), къ которымъ принадлежатъ прямыя (1), (2), (3).

Если, опредѣливъ три вещественныя величины a''', b''', c''', удовлетворяющiя ур. (18), внесемъ ихъ въ ур. (15) и выведемъ соотвѣтственныя величины λ''', μ''', ν''', то будемъ имѣть всѣ шесть координатъ искомой прямой (4). Подставивъ эти координаты въ ур. (16), получимъ ур. прямой (4).

Послѣ того можно получить отношенія между величинами и знаки четырехъ силъ $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$, $\overline{F'''}$, изъ трехъ уравненій:

$$aF + a'F' + a''F'' + a'''F''' = 0$$

$$bF + b'F' + b''F'' + b'''F''' = 0$$

$$cF + c'F' + c''F'' + c'''F''' = 0,$$

а именно:

$$F:F':F'':F''' = \begin{vmatrix} a'a''a''' \\ b'b''b''' \\ c'c''c''' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} aa''a''' \\ bb''b''' \\ cc''c''' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} aa'a''' \\ bb'b''' \\ cc'c''' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} aa'a'' \\ bb'b'' \\ cc'c'' \end{vmatrix}$$

Знаки опредѣлитей во второй части равенства опредѣлять знаки величинъ $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$, $\overline{F'''}$. Эти опредѣлители равны соотвѣтственно:

$$\pm\sqrt{D_{11}}, \pm\sqrt{D_{22}}, \pm\sqrt{D_{33}}, \pm\sqrt{D_{44}},$$

а потому послѣднія пропорціи приводятся къ пропорціямъ (8).

Обратимъ вниманіе на нѣкоторые частные случаи способа опредѣленія четырехъ силъ, находящихся въ равновѣсіи.

a) Двѣ изъ данныхъ прямыхъ (1) и (2) лежатъ въ одной плоскости, не содержащей прямую (3). Такъ какъ всякая прямая проходящая чрезъ пересѣченіе прямыхъ (1) и (2) и пересѣкающая (3) должна пересѣкать и (4), то послѣдняя должна находится въ плоскости, проходящей чрезъ (3) и пересѣченіе прямыхъ (1) и (2).

b) Всѣ три данныя прямыя (1), (2), (3) лежатъ въ одной плоскости. Тогда всякая прямая, проведенная въ этой плоскости, должна пересѣкать и прямую (4), а потому послѣдняя должна находиться въ плоскости прямыхъ: (1), (2), (3).

Въ этихъ двухъ случаяхъ можно опредѣлить силы: $\overline{F}, \overline{F'}, \overline{F''}, \overline{F'''}$ слѣдующимъ образомъ:

Проведемъ прямую (A) чрезъ пересѣченіе прямыхъ (1) съ (2) и чрезъ пересѣченіе прямой (3) съ (4)*); потомъ опредѣлимъ три силы,

---

*) Причемъ не исключаются случаи, когда одна или обѣ точки пересѣченія—въ безконечности.

$\overline{F}$, $\overline{F}$, $\overline{P}$ находящіяся въ равновѣсіи и направленныя по прямымъ (1), (2), (A); также три силы $\overline{F''}$, $\overline{F'''}$, $\overline{P'}$, находящіяся въ равновѣсіи и направленныя по прямымъ (3), (4), (A), взявъ приэтомъ силу $\overline{P'}$ равную и противоположную $\overline{P}$. Такъ какъ силы $\overline{P}$ и $\overline{P'}$ сами собою уравновѣшиваются, то четыре силы $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$, $\overline{F'''}$ также сами собою уравновѣшиваются удовлетворяя притомъ условію, что первыя три направлены по даннымъ прямымъ (1), (2), (3).

4. $n = 5$. Опредѣлить пять силъ: $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$, $\overline{F'''}$, $\overline{F^{IV}}$ такъ, чтобы онѣ были въ равновѣсіи и чтобы первыя четыре были направлены по даннымъ прямымъ: (1), (2), (3), (4).

Положимъ для перваго случая, что данныя прямыя имѣютъ двѣ вещественныя пересѣкающія (A) и (A'). По доказанному выше, каждая изъ прямыхъ (A) и (A') должна пересѣкать прямую (5); слѣд. можно взять за прямую (5) всякую прямую, лежащую на прямыхъ (A) и (A').

Чтобы получить прямыя (A) и (A'), надобно найти точки встрѣчи прямой (4) съ линейчатымъ гиперболоидомъ (H), образованномъ движеніемъ прямой по тремъ направляющимъ (1), (2), (3) и провести чрезъ эти точки двѣ производящія гиперболоида т. е. двѣ прямыя, опирающіяся на (1), (2), (3).

Можетъ случиться, что точки встрѣчи прямой (4) съ (H) совпадаютъ въ одну: тогда прямыя (A) и (A') совпадаютъ въ одну прямую а точки ихъ пересѣченія съ (5) совпадаютъ въ одну точку; поэтому (5) обращается въ касательную линію къ гиперболоиду (H); слѣд. въ разсматриваемомъ случаѣ для прямой (5) должно взять какую нибудь прямую, касательную къ гиперболоиду (H) въ одной изъ точекъ двойной прямой (A), пересѣкающей прямыя (1), (2), (3), (4).

Представимъ себѣ еще линейчатый гиперболоидъ (H'), произведенный движеніемъ прямой по направляющимъ: (2), (3), (4). Такъ какъ прямыя (A) и (A') лежатъ на этихъ направляющихъ, то онѣ представляютъ положенія производящей гиперболоида (H'); слѣд. онѣ лежатъ на немъ всѣми точками.

Въ случаѣ совпаденія прямыхъ (A) и (A') въ одну (A), гиперболоиды (H) и (H') имѣютъ общую касательную плоскость во всякой точкѣ двойной прямой (A); поэтому прямая (5) должна касаться къ (H) въ точкѣ пересѣченія ея съ прямою (A).

Можно подчинить прямую (5), которая должна опираться на (A) и (A') одному изъ добавочныхъ условій: a) проходить чрезъ данную точку M, b) быть параллельною данной прямой (B) и c) находиться въ данной плоскости (P).

Если (A) и (A') не совпадаютъ въ одну, то, при первомъ добавочномъ условіи, прямая (5) будетъ пересѣченіемъ плоскостей, проведенныхъ чрезъ эти прямыя и чрезъ точку M; при второмъ условіи прямая (5) опредѣляется пересѣченіемъ плоскостей, проведенныхъ чрезъ (A) и (A') параллельно (B); наконецъ, при третьемъ условіи, должно взять для (5) прямую, проведенную чрезъ точки встрѣчи прямыхъ (A) и (A') съ плоскостью (P).

Въ случаѣ совпаденія прямыхъ (A) и (A') въ одну (A), при первомъ добавочномъ условіи, должно взять для (5) прямую, проходящую чрезъ точку M и чрезъ точку касанія плоскости, проведенной чрезъ M и (A), къ гиперболоиду (H) или (H'); при второмъ условіи, для (5) должно взять прямую, параллельную (B), проведенную чрезъ точку касанія къ (H) или (H') плоскости проходящей чрезъ (A) и параллельной (B); наконецъ, при третьемъ условіи, для (5) должно взять пересѣченіе плоскости (P) съ плоскостью, касательною къ (H) или (H)$'$ въ точкѣ пересѣченія плоскости (P) съ прямою (A).

Построивъ прямую (5), можно опредѣлить силы $\overline{F}, \overline{F'}, \overline{F''}, \overline{F'''}, \overline{F^{IV}}$ слѣдующимъ способомъ:

Чрезъ точку пересѣченія (5) съ прямою (A) проведемъ (C), производящую гиперболоида (H) одного рода съ (1), (2), (3) и (C'), производящую гиперболоида (H') одного рода съ (2), (3), (4); отыщемъ по способу, показанному въ случаѣ $n = 4$, силы $\overline{F}, \overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}$, находящіяся въ равновѣсіи и направленныя соотвѣтственно по прямымъ: (1), (2), (3), (C), взявъ приэтомъ точку приложенія силы $\overline{R}$ въ пересѣченіи (5) съ (A).

Такъ какъ прямая (5) лежитъ въ одной плоскости съ (C) и (C'), а именно въ плоскости, проходящей чрезъ (A'), или касательной къ (H) и (H'), то можно на трехъ прямыхъ (C), (C') и (5), пересѣкающихся въ общей точкѣ, помѣстить три силы: $\overline{R}$, $\overline{R'}$, $\overline{F^{IV}}$ такъ, чтобы $\overline{F^{IV}} = \overline{R} + \overline{R'}$ при общей точкѣ приложенія силъ.

Сдѣлавъ это, присоединимъ къ силѣ $\overline{R'}$ три силы: $\overline{P'}$, $\overline{Q'}$, $\overline{F'''}$, направленныя соотвѣтственно по прямымъ (2), (3), (4) и находящіяся съ нею въ равновѣсіи, взявъ при этомъ для силъ $\overline{P'}$ и $\overline{Q'}$ точки приложенія общія съ $\overline{P}$ и $\overline{Q}$; отъ этого мы будемъ имѣть двѣ системы силъ:

$$\overline{F}, \overline{P}, \overline{Q}, \overline{R} \text{ и } \overline{P'}, \overline{Q'}, \overline{F'''}, \overline{R'},$$

находящихся въ равновѣсіи и составляющихъ одну систему силъ:

$$\overline{F}, \overline{F'} = \overline{P} + \overline{P'}, \overline{F''} = \overline{Q} + \overline{Q'}, \overline{F'''} \text{ и } \overline{F^{IV}} = \overline{R} + \overline{R'},$$

находящихся также въ равновѣсіи и направленныхъ соотвѣтственно по прямымъ: (1), (2), (3), (4), (5).

Когда нѣтъ вещественныхъ пересѣкающихъ (A) и (A') для данныхъ прямыхъ (1), (2), (3), (4), тогда можно построить требуемыя пять силъ слѣдующимъ способомъ:

Проведемъ какую нибудь прямую (G), лежащую на прямыхъ (1), (2), (3) т. е. производящую гиперболоида (H), и какую нибудь прямую (G'), лежащую на прямыхъ: (2), (3), (4), т. е. производящую гиперболоида (H'); потомъ возьмемъ какую нибудь прямую (L), лежащую на прямыхъ (G) и (G'). Прямая (L), пересѣкающая гиперболоидъ (H) въ одной изъ точекъ прямой (G) должна пересѣкать его въ нѣкоторой другой точкѣ (m); также прямая (L), пересѣкая гиперболоидъ (H') въ одной изъ точекъ прямой (G') должна пересѣкать эту поверхность въ нѣкоторой другой точкѣ (m'). Опредѣливъ точки m и m', проведемъ чрезъ первую производящую (I) гиперболоида (H) одного рода съ (G), а чрезъ вторую точку производящую (I') одного рода съ (G'). Мы будемъ имѣть послѣ того прямыя (G) и (I), пересѣкающія всѣ четыре прямыя: (1), (2), (3), (L) и прямыя (G') и (I'), пересѣкающія всѣ четыре прямыя (2), (3), (4), (L). Построимъ

еще двѣ вспомогательныя прямыя (K) и (K') такъ, чтобы (K) опиралась на прямыхъ (G) и (I'), а (K') на прямыхъ (G') и (I'), и кромѣ того удовлетворяли бы одному изъ добавочныхъ условій: a) чтобы онѣ проходили чрезъ данную точку M; b) чтобы онѣ были параллельны данной прямой (B) и c) чтобы онѣ лежали въ данной плоскости (P).

Наконецъ по способу выше изложенному для случая существованія пересѣкающихъ (A) и (A'), опредѣлимъ пять силъ:

$$\overline{F}, \overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}, \overline{S},$$

находящихся въ равновѣсіи и направленныхъ соотвѣтственно по прямымъ:

$$(1), (2), (3), (L), (K);$$

также пять силъ:

$$\overline{P'}, \overline{Q'}, \overline{F'''}, \overline{R'}, \overline{S'},$$

находящихся въ равновѣсіи и направленныхъ соотвѣтственно по прямымъ:

$$(2), (3), (4), (L), (K'),$$

взявъ при этомъ для $\overline{R'}$ силу равную и противоположную $\overline{R}$ и приложивъ силы $\overline{P'}$ и $\overline{Q'}$ къ тѣмъ же точкамъ, къ которымъ приложены $\overline{P}$ и $\overline{Q}$. Силы $\overline{R}$ и $\overline{R'}$ будутъ сами собою въ равновѣсіи; силы $\overline{P}$ и $\overline{P'}$ сложатся въ одну $\overline{F'} = \overline{P} + \overline{P'}$, направленную по прямой (2); силы $\overline{Q}$ и $\overline{Q'}$ сложатъся въ одну $\overline{F''} = \overline{Q} + \overline{Q'}$, направленную по прямой (3); силы $\overline{S}$ и $\overline{S'}$, въ случаѣ пересеченія прямыхъ (K) и (K') на конечномъ разстояніи, могутъ быть приложены къ точкѣ пересѣченія этихъ прямыхъ и потомъ замѣнены одною силою $\overline{F^{IV}} = \overline{S} + \overline{S'}$, направленною по нѣкоторой прямой (5), находящейся въ плоскости прямыхъ (K) и (K'); въ случаѣ же параллельности (K) и (K') силы $\overline{S}$ и $\overline{S'}$ (см. случай 3-й) могутъ быть уравновѣшены силою равною геометрической суммѣ $-(\overline{S} + \overline{S'})$, направленной по нѣкоторой прямой (5), параллельной прямымъ (K) и (K') и лежащей съ ними въ одной плоскоскости; слѣд. силы $\overline{S}$ и $\overline{S'}$ могутъ быть замѣнены одною силою $\overline{F^{IV}} = \overline{S} + \overline{S'}$, направленною по этой прямой (5).

Такимъ образомъ во всякомъ случаѣ мы будемъ имѣть пять силъ:

$$\overline{F}, \overline{F'}, \overline{F''}, \overline{F'''}, \overline{F^{IV}}$$

находящихся въ равновѣсіи и направленныхъ по прямымъ:

(1), (2), (3), (4), (5).

Этотъ способъ опредѣленія пяти силъ, находящихся въ равновѣсіи можетъ быть употребленъ и въ томъ случаѣ, когда пересѣкающія (A) и (A') существуютъ.

Изъ построенія прямыхъ (K) и (K') видно, что онѣ суть лучи линейнаго комплекса [K], обусловленнаго тѣмъ, что прямыя: (1), (2), (3), (4), (L) должны быть его лучами. Если перемѣнимъ прямыя (G) и (G') на другія производящія (G_1) и (G_1') гиперболоидовъ (H) и (H') и по нимъ построимъ прямыя (I_1), (I_1'), (L_1) представляющія новыя положенія прямыхъ (I), (I'), (L), то можно помощію пяти лучей (1), (2), (3), (4), (L_1) опредѣлить новый комплексъ [K_1] и два его луча (K_1) и (K_1'), замѣняющіе (K) и (K_1), при томъ же изъ вышесказанныхъ добавочныхъ условій. Потомъ, при помощи прямыхъ:

(1), (2), (3), (4), (L_1), (K_1) и (K_1'),

можно опредѣлить тѣ же силы $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$, $\overline{F'''}$, $\overline{F^{IV}}$, находящіяся въ равновѣсіи и направленныя по прямымъ: (1), (2), (3), (4), (5). Притомъ прямая (5) представляетъ пересѣченіе плоскости прямыхъ (K) и (K') съ плоскостью прямыхъ (K_1) и (K_1'); слѣд. она есть лучь конгруэнціи, составленной изъ лучей общихъ двумъ комплексамъ [K] и [K_1].

Можно получить уравненія той конгруэнціи, между лучами которой должна быть взята прямая (5), приравнявъ нулю два опредѣлителя 5-го порядка, составленные изъ строкъ таблицы (3), какъ то:

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' & a''' & a^{IV} \\ b & b' & b'' & b''' & b^{IV} \\ c & c' & c'' & c''' & c^{IV} \\ \lambda & \lambda' & \lambda'' & \lambda''' & \lambda^{IV} \\ \mu & \mu' & \mu'' & \mu''' & \mu^{IV} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a & a' & a'' & a''' & a^{IV} \\ b & b' & b'' & b''' & b^{IV} \\ c & c' & c'' & c''' & c^{IV} \\ \lambda & \lambda' & \lambda'' & \lambda''' & \lambda^{IV} \\ \nu & \nu' & \nu'' & \nu''' & \nu^{IV} \end{vmatrix} = 0,$$

что можно представить подъ видомъ

$$\left.\begin{aligned} Aa^{IV} + Bb^{IV} + Cc^{IV} + L\lambda^{IV} + M\mu^{IV} = 0 \\ A'a^{IV} + B'b^{IV} + C'c^{IV} + M'\mu^{IV} + N\nu^{IV} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (a)$$

Если прямая (5) должна быть параллельна данной прямой (B), то надобно взять въ этихъ уравненіяхъ для a^{IV}, b^{IV}, c^{IV} косинусы угловъ, составляемыхъ прямою (B) съ осями координатъ. Означая чрезъ x, y, z координаты какой нибудь точки прямой (5), мы будемъ имѣть:

$$\lambda^{IV} = c^{IV}y - b^{IV}z,\ \mu^{IV} = a^{IV}z - c^{IV}x,\ \nu^{IV} = b^{IV}x - a^{IV}y.$$

Подставивъ эти величины λ^{IV}, μ^{IV}, ν^{IV} въ ур. (a), мы получимъ уравненія двухъ плоскостей, опредѣляющихъ своимъ пересѣченіемъ прямую (5).

Принявъ для прямой (5) добавочное условіе, что она должна проходить чрезъ данную точку $M(x_1, y_1, z_1)$ и означая чрезъ x, y, z координаты какой нибудь другой точки этой прямой, мы будемъ имѣть пропорціи:

$$a^{IV} : b^{IV} : c^{IV} : \lambda^{IV} : \mu^{IV} : \nu^{IV}$$

$$= (x - x_1) : (y - y_1) : (z - z_1) : \begin{vmatrix} y & z \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z & x \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix},$$

помощію которыхъ можно исключить изъ ур. (a) неизвѣстныя a^{IV}, b^{IV}, c^{IV}, λ^{IV}, μ^{IV}, ν^{IV}; отъ этого мы получимъ два уравненія съ перемѣнными x, y, z, принадлежащія опять двумъ плоскостямъ, пересѣкающимся по прямой (5), а именно:

$$(A - Mz_1)x + (B + Lz_1)y + (C - Ly_1 + Mx_1)z$$
$$= Ax_1 + By_1 + Cz_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

$$(A' + Ny_1 - M'z_1)x + (B' - Nx_1)y + (C' + M'x_1)z$$
$$= A'x_1 + B'y_1 + C'z_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

Наконецъ, принявъ добавочное условіе, что прямая (5) должна находиться въ данной плоскости (P),

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

можно найти двѣ точки этой прямой, а именно полюсы плоскости (P) въ каждомъ изъ комплексовъ (a). Разсматривая x_1, y_1, z_1 въ уравненіи (b), какъ координаты полюса плоскости (P), въ первомъ комплексѣ, мы получимъ уравненія для опредѣленія этихъ координатъ, выразивъ условіе, что уравненія (b) и (d) тожественны относительно x, y, z, а именно:

$$(A - Mz_1) : (B + Lz_1) : (C + Mx_1 - Ly_1) : (Ax_1 + By_1 + Cz_1) \\ = \alpha : \beta : \gamma : \delta.$$

Такимъ же образомъ, означая чрезъ x_1', y_1', z_1' координаты полюса плоскости (P) во второмъ комплексѣ (a), мы найдемъ для опредѣленія этихъ координатъ уравненія:

$$(A' + Ny_1' - M'z_1') : (B' - Nx_1) : (C' + M'x_1) : (A'x_1' + B'y_1' + C'z_1') \\ = \alpha : \beta : \gamma : \delta.$$

Опредѣливъ положеніе прямой (5), можно вывести величины силъ F, $F' \ldots F^{IV}$ изъ уравненій:

$$\Sigma aF = 0,\ \Sigma bF = 0,\ \Sigma cF = 0,\ \Sigma \lambda F = 0,\ \Sigma \mu F = 0.$$

Означая чрезъ Δ опредѣлитель, представляющій первую часть перваго изъ уравненій (a) и чрезъ $\Delta_{r,s}$ производную его относительно элемента строки r-вой и столбца s-ва, мы будемъ имѣть:

$$F : F' : F'' : F''' : F^{IV} = \Delta_{i,1} : \Delta_{i,2} : \Delta_{i,3} : \Delta_{i,4} : \Delta_{i,5}.$$

Отношенія между векторами силъ можно получить изъ пропорцій (11).

5. $n = 6$. Опредѣлить шесть силъ $\overline{F}, \overline{F'}, \overline{F''}, \ldots \overline{F^{V}}$ такъ, чтобы онѣ были въ равновѣсіи и чтобы первыя пять были направлены по даннымъ прямымъ (1), (2)....(5).

По доказанному въ § 67 всѣ шесть прямыхъ, по которымъ направлены силы, находящіяся въ равновѣсіи, должны быть лучами одного комплекса; поэтому для искомой прямой (6) можно взять вся-

кій лучь комплекса $[K]$, опредѣленнаго пятью данными лучами: (1), (2),....(5). Можно приэтомъ подчинить прямую (6) одному изъ добавочныхъ условій: a) проходить чрезъ данную точку (M), b) быть параллельной данной прямой (B) и c) находиться въ данной плоскости. Эти условія однакожъ не достаточны для совершеннаго опредѣленія положенія прямой (6). При первомъ условіи можно взять для (5) всякій лучь комплекса $[K]$, проходящій чрезъ точку M; при второмъ условіи можно взять для (5) лучь комплекса $[K]$, параллельный прямой (B) и находящійся въ какой нибудь плоскости, параллельной этой прямой; наконецъ при третьемъ условіи можно взять для (5) всякій лучь, лежащій въ плоскости (P), т. е. всякую прямую, преведенную въ этой плоскости чрезъ полюсъ.

Рѣшеніе предложеннаго вопроса о равновѣсіи шести силъ можетъ быть приведено къ опредѣленію двухъ системъ силъ, содержащихъ по пяти силъ, находящихся въ равновѣсіи порознь.

Для этого изъ пяти данныхъ прямыхъ: (1), (2), (3), (4), (5) составимъ два сочетанія по четыре, напр.

(1), (2), (3), (4) и (2), (3), (4), (5);

опредѣлимъ (по способу для случая $n = 5$), пять силъ

$$\overline{F}, \overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}, \overline{S},$$

находящійся въ равновѣсіи такъ, чтобы первыя четыре были направлены по прямымъ, составляющимъ первое сочетаніе; также опредѣлимъ пять силъ

$$\overline{P'}, \overline{Q'}, \overline{R'}, \overline{F^{IV}}, \overline{S'},$$

находящіяся въ равновѣсіи такъ, чтобы первыя четыре были направлены по прямымъ второго сочетанія, и чтобы притомъ сила $\overline{S'}$ была подчинена тому же самому добавочному условію какъ и $\overline{S}$. Отъ этого силы $\overline{S}$ и $\overline{S'}$ будутъ направлены по двумъ прямымъ (L) и (L'), находящимся въ одной плоскости. Для силъ $\overline{P}$ и $\overline{P'}$, направленныхъ по прямой (2) можно взять общую точку приложенія и сложить эти силы

въ одну $\overline{F} = \overline{P} + \overline{P'}$; также силы $\overline{Q}$ и $\overline{Q'}$ можно приложить къ одной точкѣ и сложить въ одну $\overline{F'} = \overline{Q} + \overline{Q'}$, а силы $\overline{R}$ и $\overline{R'}$ приложить къ одной точкѣ и сложить въ одну $\overline{F''} = \overline{R} + \overline{R'}$. Силы $\overline{S}$ и S', находящіяся въ одной плоскости могутъ быть уравновѣшены силою равною и противоположною ихъ геометрической суммѣ и направленною по нѣкоторой прямой, которая опредѣлится по способу, показанному въ случаѣ $n = 3$; слѣд. силы $\overline{S}$ и $\overline{S'}$ могутъ быть замѣнены одною силою $\overline{F^{V}} = \overline{S} + \overline{S'}$, направленною по этой прямой. Послѣ того мы будемъ имѣть шесть силъ $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$, $\overline{F'''}$, $\overline{F^{IV}}$, $\overline{F^{(V)}}$ находящихся въ равновѣсіи; притомъ первыя пять направлены по даннымъ прямымъ (1), (2), (3), (4), (5).

Величины силъ $\overline{S}$ и $\overline{S'}$ произвольны, а потому при тѣхъ же положеніяхъ прямыхъ (L) и (L'), прямая (6) можетъ имѣть безчисленное множество положеній въ плоскости прямыхъ (L) и (L'), сходящихся съ ними въ одной точкѣ.

Если прямые (1), (2), (3), (4), имѣютъ вещественныя пересѣкающія (A) и (B), а прямыя (2), (3), (4), (5) — вещественныя пересѣкающія (A') и (B'), то (L) будетъ лежать на (A) и (B), а (L') на (A') и (B'); слѣд. въ такомъ случаѣ можно опредѣлить непосредственно положеніе прямыхъ (L) и (L'), принявъ одно изъ вышесказанныхъ добавочныхъ условій для (6). Каждое такое условіе требуетъ, чтобы прямыя (L) и (L') находились въ одной плоскости. Всякую прямую въ этой плоскости, проходящую чрезъ пересѣченіе прямыхъ (L) и (L'), можно взять за прямую (6).

Если всѣ сочетанія, по четыре составленныя изъ пяти данныхъ прямыхъ: (1), (2), (3), (4), (5), допускаютъ вещественныя пересѣкающія, то можно опредѣлить пять прямыхъ: (L), (L'), (L''), (L'''), (L^{IV}), имѣющихъ свойство, что каждая опирается на пересѣкающихъ одного изъ сочетаній и удовлетворяетъ тому добавочному условію, которое требуется для прямой (6). Сочетая эти прямыя по двѣ, можно помощію каждаго сочетанія опредѣлить положеніе одной и той же прямой (6). Изъ этого слѣдуетъ, что всѣ пять прямыхъ: (L), (L'), (L''), (L'''), (L^{IV}) должны лежать въ одной плоскости и сходиться въ одной

точкѣ на конечномъ или безконечномъ разстояніи, что составляетъ теорему Сильвестера *).

Въ случаѣ $n = 6$ число строкъ въ таблицѣ (3) равно числу столбцовъ, а потому эта таблица даетъ одинъ только опредѣлитель, который, будучи равенъ нулю, даетъ уравненіе вида

$$Aa' + Bb' + Cc' + L\lambda' + M\mu' + N\nu' = 0, \ldots\ldots (a)$$

связывающее координаты прямой (6) и принадлежащее линейному комплексу $[K]$. Подчинивъ прямую (6) добавочному условію проходить чрезъ данную точку $M(x_1, y_1, z_1)$, можно получить уравненіе плоскости, въ которой находятся всѣ положенія прямой (6). Для этого надобно подставить въ ур. (a) вмѣсто координатъ прямой (6) величины, имъ пропорціональныя:

$$(x_1 - x),\ (y_1 - y),\ (z_1 - z),\ \begin{vmatrix} y & z \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} z & x \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

гдѣ x, y, z суть перемѣнныя, означающія координаты какой нибудь точки прямой (6). Мы получимъ такимъ образомъ ур.

$$\begin{aligned} &(A - Mz_1 + Ny_1)x \\ &+ (B - Nx_1 + Lz_1)y \\ &+ (C - Ly_1 + Mx_1)z = Ax_1 + By_1 + Cz_1 \ldots\ldots (b) \end{aligned}$$

При добавочномъ условіи, что прямая (b) должна быть параллельна прямой (B), надобно для a', b', c' взять косинусы угловъ, составленныхъ прямою (B) съ осями координатъ и опредѣлить величины λ', μ', ν', удовлетворяющія ур. (a) и ур.

$$a'\lambda' + b'\mu' + c'\nu' = 0.$$

Положивъ въ ур. (a)

$$\lambda' = \begin{vmatrix} c' & b' \\ z & y \end{vmatrix},\ \mu' = \begin{vmatrix} a' & c' \\ x & z \end{vmatrix},\ \nu' = \begin{vmatrix} b' & a' \\ y & x \end{vmatrix},$$

мы получимъ уравненіе плоскости

*) Comptes rendus t. 52. См. также Кинем. стр. 382.

$$(Nb^V - Mc^V)x + (Lc^V - Na^V)y + (Ma^V - Lb^V)z = Aa^V + Bb^V + Cc^V,$$

содержащей всякое положеніе прямой (6).

Наконецъ при добавочномъ условіи, что прямая (6) должна лежать въ плоскости

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (P)$$

можно получить коорданаты точки, чрезъ которую проходитъ прямая (6), рѣшивъ относительно x_1, y_1, z_1 уравненія:

$$(A - Mz_1 + Ny_1):(B - Nx_1 + Mz_1):(C - Ly_1 + Mx_1)$$
$$:(Ax_1 + By_1 + Cz_1) = \alpha : \beta : \gamma : \delta,$$

выражающія условіе, что два уравненія (b) и (P) тожественны относительно x, y, z. Эта точка есть полюсъ плоскости (P) и всякая прямая, чрезъ нее проведенная въ плоскости (P) можетъ быть взята за (6).

Зная координаты прямой (6), можно получить отношенія между силами изъ уравненій (2). Означая чрезъ $\varDelta$ опредѣлитель (3) и чрезъ $\varDelta_{r,s}$ его производную, относительно строки r-вой и столбца s-ва, мы будемъ имѣть:

$$F : F' : F'' : F''' : F^{IV} : F^V$$
$$= \varDelta_{i,1} : \varDelta_{i,2} : \varDelta_{i,3} : \varDelta_{i,4} : \varDelta_{i,5} : \varDelta_{i,6}.$$

Можно получить отношенія между векторами силъ изъ пропорцій (11).

69. Разсмотримъ теперь случаи равновѣсія силъ, когда число силъ больше шести.

Вопервыхъ опредѣлимъ семь силъ: $\overline{F}$, $\overline{F'}$, ... $\overline{F^{VI}}$, находящихся въ равновѣсіи такъ, чтобы первыя шесть были направлены по даннымъ прямымъ: (1), (2), (3), (4), (5), (6).

Въ этомъ случаѣ прямая (7), по которой должна быть направлена послѣдняя сила $\overline{F^{VI}}$, можетъ имѣть всякое положеніе въ пространствѣ; потому что шесть ур. (2), будутъ совмѣстны при всякихъ значеніяхъ шести величинъ a^{VI}, b^{VI}, c^{VI}, λ^{VI}, μ^{VI}, ν^{VI}, удовлетворяющихъ ур.

$$a^{VI}\lambda^{VI} + b^{VI}\mu^{VI} + c^{VI}\nu^{VI} = 0.$$

Означая чрезъ A_1, A_2, ... A_7 опредѣлители шестаго порядка, составленные изъ элементовъ, которые получимъ, выпуская послѣдовательно столбцы таблицы (3), мы будемъ имѣть

$$F : F' : F'' \ldots . F^{VI} = A_1 : A_2 : \ldots . A_7.$$

Можно также получить отношенія между силами изъ пропорцій (11).

Можно построить требуемую систему семи силъ слѣдующимъ образомъ:

Взявъ произвольно прямую (7) и на ней какую нибудь точку M, построимъ плоскость (P), имѣющую полюсомъ точку M въ комплексѣ $[K]$, опредѣленномъ пятью лучами: (1), (2), (3), (4), (5); и потомъ плоскость (P'), имѣющую также полюсомъ точку M въ комплексѣ $[K']$, опредѣленнаго лучами (2), (3), (4), (5), (6), и найдемъ пересѣченія плоскостей (P) и (P') съ какою нибудь плоскостью (Q), проведенною чрезъ прямую (7). Пусть будетъ (A) пересѣченіе (P) съ (Q) а (A') пересѣченіе (P') съ (Q). Послѣ того опредѣлимъ по способу предъидущаго § шесть силъ

$$\overline{F}, \overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}, \overline{S}, \overline{T},$$

находящихся въ равновѣсіи и направленныхъ по прямымъ: (1), (2), (3), (4), (5), (A) и шесть силъ

$$\overline{P'}, \overline{Q'}, \overline{R'}, \overline{S'}, \overline{F^{V}}, \overline{T'}$$

находящихся въ равновѣсіи, и направленныхъ по прямымъ: (2), (3), (4), (5), (6), (A'), взявъ силы $\overline{T}$ и $\overline{T'}$ такъ, чтобы онѣ были приложены къ M и слагались бы въ одну $\overline{F^{VI}} = \overline{T} + \overline{T'}$, направленную по прямой (7). Такія двѣ системы силъ составляютъ, очевидно, одну систему семи силъ:

$$\overline{F}, \overline{F'} = \overline{P} + \overline{P'}, \overline{F''} = \overline{Q} + \overline{Q'}, \overline{F'''} = \overline{R} + \overline{R'},$$

$$\overline{F^{IV}} = \overline{S} + \overline{S'}, \overline{F^{V}}, \overline{F^{VI}} = \overline{T} + \overline{T'},$$

находящихся въ равновѣсіи и направленныхъ по прямымъ:

$$(1),\ (2),\ (3),\ (4),\ (5),\ (6),\ (7).$$

Когда число силъ, которыя должны быть въ равновѣсіи больше семи, тогда прямыя, по которымъ направлены силы и величины двухъ или болѣе силъ произвольны.

Взявъ произвольно величины и направленія силъ:

$$\overline{F^{VI}},\ \overline{F^{VII}},\ldots \overline{F^{(n-1)}},$$

можно взять также произвольно прямыя (1), (2),...(6), по которымъ должны быть направлены остальныя шесть силъ; послѣ того, зная координаты всѣхъ прямыхъ, по которымъ направлены силы, можно помощію ур. (2) выразить величины шести силъ: F, F', ... $F^{(V)}$ линейными функціями данныхъ силъ. Можно построить эти шесть силъ слѣдующимъ образомъ:

Опредѣлимъ по вышеизложенному способу семь силъ:

$$\overline{F_1},\ \overline{F_2},\ \overline{F_3},\ \overline{F_4},\ \overline{F_5},\ \overline{F_6},\ \overline{F^{VI}},$$

находящихся въ равновѣсіи и направленныхъ по прямымъ:

$$(1),\ (2),\ (3),\ (4),\ (5),\ (6),\ (7);$$

потомъ семь силъ:

$$\overline{F_1'},\ \overline{F_2'},\ \overline{F_3'},\ \overline{F_4'},\ \overline{F_5'},\ \overline{F_6'},\ \overline{F^{VII}},$$

находящихся въ равновѣсіи и направленныхъ по прямымъ:

$$(1),\ (2),\ (3),\ (4),\ (5),\ (6),\ (8)$$

и т. д.; наконецъ семь силъ

$$F_1^{(n-7)},\ F_2^{(n-7)},\ F_3^{(n-7)},\ F_4^{(n-7)},\ F_5^{(n-7)},\ F_6^{(n-7)},\ F^{(n-7)},$$

находящихся въ равновѣсіи и направленныхъ по прямымъ (1), (2), (3), (4), (5), (6), (n); послѣ того сложимъ силы, направленныя по одной прямой; отъ этого получимъ силы:

$$\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_1'} + \ldots \overline{F_1^{(n-7)}}$$

$$\overline{F'} = \overline{F_2} + \overline{F_2'} + \ldots \overline{F_2^{(n-7)}}$$

. . . .

$$\overline{F^V} = \overline{F_6} + \overline{F_6'} + \ldots \overline{F_6^{(n-7)}}$$

находящіяся съ силами $\overline{F^{VI}}$, $\overline{F^{VII}}, \ldots \overline{F^{(n-1)}}$ въ равновѣсіи.

ГЛАВА V.

Эквивалентность силъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему точекъ. Приведеніе системы силъ къ одной или двумъ силамъ. Частные случаи эквивалентности силъ.

70. Двѣ системы силъ называются *эквивалентными*, если онѣ могутъ быть уравновѣшены порознь одною и тою же системою силъ.

Простѣйшій случай эквивалентности представляютъ двѣ силы, геометрически равныя, направленныя по одной прямой линіи и приложенныя къ разнымъ точкамъ; онѣ эквивалентны, потому что онѣ уравновѣшиваются одною силою, имъ равною и противоположною, направленною по той же прямой. (См. § 67 случай $n = 2$).

Если двѣ системы силъ $(\overline{a}, \overline{a}', \ldots)$ и $(\overline{b}, \overline{b}', \ldots)$ составляютъ одну систему силъ $(\overline{a}, \overline{a}', \ldots \overline{b}, \overline{b}', \ldots)$ находящихся въ равновѣсіи, то силы $(-\overline{b}, -\overline{b}', \ldots)$ равныя и противоположныя силамъ второй системы, направленныя соотвѣтственно съ ними по тѣмъ же прямымъ, составляютъ систему эквивалентную первой системѣ силъ, потому что та и другая уравновѣшиваются одною системою $(\overline{b}, \overline{b}', \ldots)$. Напримѣръ, опредѣливъ по способамъ, изложеннымъ въ предыдущей главѣ силы $\overline{F}, \overline{F}', \ldots \overline{F^{(n-1)}}$, находящіяся въ равновѣсіи, можно составить двѣ эквивалентныя системы:

$$(\overline{F}, \overline{F}', \ldots \overline{F^{(m)}}), (-\overline{F^{(m+1)}}, -\overline{F^{(m+2)}}, -\overline{F^{(n-1)}}),$$

перемѣнивъ силы $\overline{F^{(m)}}, \overline{F^{(m+1)}} \ldots$ на силы прямо-противоположныя, направленныя по тѣмъ же прямымъ: $(m+1), (m+2) \ldots (n)$.

Въ случаѣ $n = 3$ силы $\overline{F}$, $\overline{F'}$ эквивалентны одной $-\overline{F''}$, направленной по прямой (3), лежащей въ одной плоскости съ прямыми (1) и (2) и сходящейся съ ними въ одной точкѣ, на конечномъ или безконечномъ разстояніи.

Въ случаѣ $n = 4$ двѣ силы $\overline{F}$, $\overline{F'}$ эквивалентны двумъ силамъ $-\overline{F''}$, $-\overline{F'''}$, направленнымъ по прямымъ (3) и (4), которыя съ прямыми (1) и (2) представляютъ четыре положенія производящей нѣкотораго линейчатаго гиперболоида.

Чтобы двѣ системы силъ были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы ихъ главные векторы и главные моменты при одномъ началѣ были соотвѣтственно равны геометрически.

Въ самомъ дѣлѣ: если $\overline{A}$ и $\overline{B}$ суть главные векторы, а $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ главные моменты двухъ системъ силъ $(\overline{a}, \overline{a'}, \ldots)$, $(\overline{b}, \overline{b'}, \overline{b''}, \ldots)$ при томъ же началѣ, то $\overline{A} - \overline{B}$ и $\overline{P} - \overline{Q}$ будутъ: главный векторъ и главный моментъ одной системы силъ

$$(\overline{a}, \overline{a'}, \ldots, -\overline{b}, -\overline{b'}, \ldots),$$

составленной изъ силъ первой системы и силъ прямо-противоположныхъ и равныхъ силамъ второй системы.

Для эквивалентности двухъ данныхъ системъ силъ, необходимо и достаточно, чтобы эта третья система была въ равновѣсіи; это же условіе выражается равенствами:

$$\overline{A} - \overline{B} = 0,\ \overline{P} - \overline{Q} = 0 \text{ или}$$

$$\overline{A} = \overline{B} \text{ и } \overline{P} = \overline{Q}.$$

На основаніи этого условія эквивалентности силъ, можно данную систему силъ привести къ простѣйшей, а именно: къ одной или двумъ силамъ, которыя обыкновенно называютъ *равнодѣйствующими* съ данною системою силъ.

71. Чтобы данная система силъ $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}, \ldots$ имѣла бы одну равнодѣйствующую, главный векторъ сисмемы силъ $\overline{R}$ долженъ быть векторомъ равнодѣйствующей, а главный моментъ $\overline{K}$ — моментомъ равнодѣйствующей. Это возможно только тогда, когда главный векторъ $\overline{R}$ не равенъ нулю, а главный моментъ $\overline{K}$ равенъ нулю или пер-

пендикулярень къ $\overline{R}$; слѣд. главный моментъ $\overline{K}$ обусловливается вообще тѣмъ, что его проекція на главномъ векторѣ равна нулю, т. е. уравненіемъ

$$K \cos (KR) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Условія, что главный векторъ не равенъ нулю и что проекція на немъ главнаго момента $\overline{K}$ равна нулю, не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы система силъ имѣла одну равнодѣйствующую; потому что если онѣ удовлетворены, то можно опредѣлить силу, у которой векторъ есть $\overline{R}$, а моментъ $\overline{K}$, т. е. силу эквивалентную данной системѣ силъ.

Когда $\overline{K} = 0$, главный векторъ $\overline{R}$ представляетъ равнодѣйствующую всѣхъ силъ. А когда $\overline{K}$ не равенъ нулю, равнодѣйствующая есть сила, геометрически равная $\overline{R}$, въ плоскости, перпендикулярной къ $\overline{K}$ и проходящей чрезъ начало O, съ плечомъ $q = \frac{K}{R}$. Можно сказать вообще, что *равнодѣйствующая есть сила геометрически равная главному вектору, направленная по центральной оси.* (§ 64).

Уравненіе (1) показываетъ, что, *если система силъ имѣетъ одну равнодѣйствующую, то самый меньшій главный моментъ равенъ нулю* и обратно: *если самый меньшій главный моментъ равенъ нулю, а геометрическая сумма всѣхъ силъ не равна нулю, то система силъ имѣетъ одну равнодѣйствующую.*

Относя точки приложенія силъ къ прямоугольнымъ осямъ координатъ Ox, Oy, Oz, принимая начало аргументовъ $\overline{R}$ и $\overline{K}$ за начало координатъ, и означая (какъ въ § 64) чрезъ A, B, C проекціи главнаго вектора $\overline{R}$ и чрезъ L, M, N проекціи главнаго момента на этихъ осяхъ, можно написать ур. (1) подъ видомъ

$$L\frac{A}{R} + M\frac{B}{R} + N\frac{C}{R} = 0$$

или

$$AL + BM + CN = 0 \text{ (см. § 65)},$$

приэтомъ всѣ три величины A, B, C не могутъ быть равны нулю, такъ какъ R не равенъ нулю.

Такъ какъ A, B, C, L, M, N суть лучевые координаты прямой, по которой должна быть направлена равнодѣйствующая, то

$$\left.\begin{aligned} L &= C\eta - B\zeta \\ M &= A\zeta - C\xi \\ N &= B\xi - A\eta \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

Эти уравненія при перемѣнныхъ значеніяхъ ξ, η, ζ принадлежатъ разсматриваемой прямой. Онѣ тожественны съ ур. (43) § 65, принадлежащими центральной оси, въ томъ случаѣ когда инварьянтъ

$$\overline{RK} = AL + BM + CN$$

равенъ нулю..

Разсмотримъ теперь наиболѣе замѣчательныя системы силъ, приводящихся къ одной равнодѣйствующей.

72. *Силы, находящіяся въ одной плоскости.* Положимъ, что силы $\overline{F}$, $\overline{F'}$,... находятся въ одной плоскости (P) и что ихъ геометрическая сумма $\Sigma\overline{F}$ не равна нулю. Взявъ начало моментовъ и векторовъ въ какой либо точкѣ O на плоскости (P), мы получимъ главный векторъ $\overline{R} = \Sigma\overline{F}$, не равный нулю. Моменты всѣхъ силъ будутъ направлены по перпендикуляру, возставленному изъ O къ плоскости (P) въ ту или другую сторону относительно этой плоскости; поэтому главный моментъ $\overline{K} = \Sigma\overline{MF}$ будетъ также направленъ по этому перпендикуляру, если онъ не равенъ нулю. А такъ какъ $\overline{R}$ лежитъ въ плоскости (P), то $\overline{K}$ перпендикуляренъ къ $\overline{R}$; слѣд. условіе (1) удовлетворено. И такъ *система силъ, лежащихъ въ одной плоскости, приводится къ одной силѣ всякій разъ какъ геометрическая сумма всѣхъ силъ не равна нулю.*

Такъ какъ моменты $\overline{MF}$, $\overline{MF'}$,.... направлены по одной прямой, то ихъ геометрическая сумма $\Sigma\overline{MF}$ приводится къ алгебраической ΣMF, гдѣ каждый членъ представляетъ площадь параллелограма, въ которомъ двѣ противоположныя стороны суть: сама сила $\overline{F}$ и ея векторъ $\overline{vF}$. Эта площадь выражается произведеніемъ силы F на плечо, т. е. на перпендикуляръ, опущенный изъ начала O на прямую, по которой направлена сила. Положительные члены въ суммѣ ΣMF

принадлежатъ силамъ, дѣйствующимъ вправо для наблюдателя, прислоненнаго къ $\overline{K}$, а отрицательныя — силамъ, дѣйствующимъ влѣво. Слѣд. чтобы найти главные моментъ $\overline{K}$ надобно: вычислить площади параллелограмовъ, выражающихъ моменты всѣхъ силъ; найти сумму площадей, соотвѣтствующихъ силамъ, дѣйствующимъ въ одну сторону и сумму площадей, соотвѣтствующихъ силамъ, дѣйствующимъ противоположно, и вычесть меньшую сумму изъ большей; разность дастъ величину главнаго момента K, а равномѣрная ей длина, отложенная отъ O перпендикулярно къ плоскости (P) въ сторону, куда направлены моменты, принадлежащіе большей изъ двухъ суммъ, представитъ самый главный моментъ $\overline{K}$. Равнодѣйствующая всѣхъ силъ будетъ сила, геометрически равная главному вектору $\overline{R}$ съ плечомъ $q=\frac{K}{R}$.

Взявъ въ плоскости (P) прямоугольныя координатныя оси Ox, Oy съ осью Oz перпендикулярною къ (P), въ общихъ формулахъ § 64 мы будемъ имѣть:

$$z=0,\ z'=0,\ldots\ Z=0,\ Z'=0,\ldots;$$

$$C=\Sigma Z=0,\ L=\Sigma\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z\end{vmatrix}=0,\ M=\Sigma\begin{vmatrix} z & x \\ Z & X\end{vmatrix}=0,$$

$$N=\Sigma\begin{vmatrix} x & y \\ X & Y\end{vmatrix}=K;$$

отъ этого уравненія равнодѣйствующей (2) или ур. центральной оси (см. ур. 42 § 65) приведутся къ слѣдующимъ

$$\zeta=0,\ K=B\xi-A\eta\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

гдѣ

$$A=\Sigma X,\ B=\Sigma Y.$$

Если начало моментовъ O взято на равнодѣйствующей, то $K=0$ т. е. $\Sigma MF=0$; слѣд. прямая, по которой направлена равнодѣйствующая, имѣетъ свойство, что *алгебраическая сумма произведеній силъ, умноженныхъ на перпендикуляры, на нихъ опущенные изъ какой либо точки этой прямой, равна нулю.*

Въ частномъ случаѣ двухъ силъ: $\overline{F}$ и $\overline{F'}$, *эти силы обратно пропорціональны перпендикулярамъ, на нихъ опущеннымъ изъ какой либо точки ихъ равнодѣйствующей.*

Это свойство очевидно требуетъ, чтобы прямыя, по которымъ направлены силы $\overline{F}$ и $\overline{F'}$ съ прямою, по которой направлена ихъ равнодѣйствующая, сходились въ одной точкѣ, на конечномъ или безконечномъ разстояніи, что согласно въ доказанномъ въ § 66, въ случаѣ $n=2$.

73. *Параллельныя силы.* Пусть будетъ система силъ $\overline{F}$, $\overline{F_{\prime}}$,..., параллельныхъ одной прямой (l) таковыхъ, что геометрическая сумма $\Sigma\overline{F}$ не равна нулю. Главный векторъ $\overline{R}=\Sigma\overline{F}$, при какомъ ни есть началѣ O, не равенъ нулю и представляетъ прямую параллельную (l), равную разности между ариѳметическою суммою силъ, направленныхъ въ одну сторону и ариѳметическою суммою силъ, направленныхъ противоположно. Приэтомъ онъ направленъ въ сторону тѣхъ слагаемыхъ силъ, которыя даютъ бо́льшую сумму.

Такъ какъ главный векторъ $\overline{R}$ направленъ по одной прямой съ векторомъ каждой силы, то онъ перпендикуляренъ ко всѣмъ моментамъ: MF, MF', . . ., для этого всѣ эти моменты должны находиться въ одной плоскости, перпендикулярной къ $\overline{R}$; въ этой же плоскости должна находиться и геометрическая ихъ сумма $\overline{K}=\Sigma\overline{MF}$, если она не равна нулю; слѣд. если главный моментъ $\overline{K}$, не равенъ нулю, то онъ перпендикуляренъ къ $\overline{R}$, а потому условіе (1) удовлетворено.

И такъ *система силъ, параллельныхъ одной прямой, приводится къ одной силѣ, всякій разъ какъ ихъ геометрическая сумма не равна нулю.*

Равнодѣйствующая геометрически равна главному вектору $\overline{R}$; слѣд. она параллельна прямой (l) и направлена въ одну сторону съ силами, принадлежащими большей изъ двухъ ариѳметическихъ суммъ, полученныхъ отъ сложенія силъ, направленныхъ въ одну сторону и силъ, направленныхъ противоположно.

Если начало моментовъ взято на прямой, по которой направлена равнодѣйствующая, то главный моментъ $\overline{K}$ равенъ нулю; отъ этого сумма проекцій всѣхъ моментовъ на какой либо оси $\overline{\sigma}$, проведенной чрезъ такое начало, равна нулю, что выражается уравненіемъ (34)

$$\Sigma F\binom{F}{\sigma}=0.$$

Означая чрезъ δ перпендикуляръ, опущенный изъ точки приложенія силы $\overline{F}$ на плоскость прямыхъ $\overline{\sigma}$ и $\overline{R}$, (этотъ перпендикуляръ равенъ кратчайшему разстоянію между силою $\overline{F}$ и осью $\overline{\sigma}$), мы будемъ имѣть (см. § 59).

$$\mathfrak{F}\binom{F}{\sigma} = \delta F \sin (F\sigma).$$

А такъ какъ $\overline{F}$ параллельна $\overline{R}$, то $\sin (F\sigma) = \pm \sin (R\sigma)$; причемъ должно взять знакъ $+$ или $-$, смотря потому, будетъ ли сила $\overline{F}$ для наблюдателя $\overline{\sigma}$ направлена вправо или влѣво; отъ этого ур. (34), по раздѣленіи всѣхъ членовъ на общій множитель $\sin (R\sigma)$ приводится къ слѣдующему

$$\Sigma F\delta = 0;$$

причемъ F означаетъ величину силы, взятую съ $+$ или $-$, смотря потому будетъ ли она направлена въ одну сторону съ $\overline{R}$ или противоположно. Изъ этого уравненія видно, что если силы $\overline{F}$, $\overline{F}'$, $\overline{F}''$.... разсматриваются какъ массы, (положительныя или отрицательныя), сосредоточенныя въ соотвѣтственныхъ точкахъ приложенія, то сумма моментовъ этихъ массъ относительно всякой плоскости, проходящей чрезъ равнодѣйствующую всѣхъ силъ, равна нулю. Для этого необходимо, чтобы прямая, по которой направлена равнодѣйствующая, проходила чрезъ центръ (C) такой системы массъ. Слѣд. если мы опредѣлимъ эту точку по правиламъ, изложеннымъ въ статьѣ В геометріи массъ, и приложимъ къ ней силу $\overline{R}$, геометрически равную главному вектору, то получимъ равнодѣйствующую всѣхъ параллельныхъ силъ $\overline{F}$, $\overline{F}'$,...

Центръ системы массъ, равномѣрныхъ системъ параллельныхъ силъ и сосредоточенныхъ въ точкахъ приложенія силъ, называется центромъ параллельныхъ силъ.

Если всѣ точки приложенія силъ, будучи неизмѣняемо связаны, получаютъ какое либо вращательное перемѣщеніе около центра (C), а силы $\overline{F}$, $\overline{F}'$,... остаются параллельными прямой (l), сохраняя ве-величины и направленія, то послѣ перемѣщенія точекъ центръ новой системы параллельныхъ силъ будетъ опять въ C; слѣд. силы будутъ имѣть ту же равнодѣйствующую $\overline{R}$, приложенную къ точкѣ C.

И такъ: *если параллельныя силы сохраняютъ величины и направленія, при вращеніи точекъ приложенія около центра этихъ силъ, то равнодѣйствующая этихъ силъ, будучи приложена къ ихъ центру, сохраняетъ свою величину, направленіе и точку приложенія.*

Существованіе центра параллельныхъ силъ и доказанное сейчасъ его свойство вытекаетъ также изъ уравненій равнодѣйствующей (2).

Раздѣливъ параллельныя силы на двѣ группы: силы, направленныя въ одну сторону, и силы противоположныя, положимъ, что сила $\overline{F}$ принадлежитъ той группѣ, которая имѣетъ бо́льшую сумму и означимъ чрезъ $F^{(i)}$ величину одной изъ прочихъ силъ, взятую съ $+$ или съ $-$, смотря потому, направлена ли она въ одну сто́рону съ $\overline{F}$ или противоположно. Означимъ чрезъ a, b, c косинусы угловъ, составляемыхъ силою $\overline{F}$ съ прямоугольными осями координатъ Ox, Oy, Oz, приложимъ формулы § 65 къ разсматриваемому случаю. Мы будемъ имѣть:

$$R = \Sigma F,\ A = aR,\ B = bR,\ C = cR,$$
$$L = c\Sigma Fy - b\Sigma Fz$$
$$M = a\Sigma Fz - c\Sigma Fx$$
$$N = b\Sigma Fx - a\Sigma Fy;$$

отъ этого ур. (2) примутъ видъ

$$\left.\begin{aligned} c(R\eta - \Sigma Fy) &= b(R\zeta - \Sigma Fz) \\ a(R\zeta - \Sigma Fz) &= c(R\xi - \Sigma Fx) \\ b(R\xi - \Sigma Fx) &= a(R\eta - \Sigma Fy) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Онѣ показываютъ, что на прямой, по которой направлена равнодѣйствующая, находится точка, опредѣляемая координатами:

$$\xi = \frac{\Sigma Fx}{R},\ \eta = \frac{\Sigma Fy}{R},\ \zeta = \frac{\Sigma Fz}{R} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

По формуламъ § 12 видно, что эта точка есть центръ системы массъ F, F', . . ., находящихся въ точкахъ приложенія параллельныхъ силъ: (x, y, z), (x', y', z'), . . .

Такъ какъ координаты (5) удовлетворяютъ ур. (4) при всякихъ значеніяхъ a, b, c, то прямая (4) должна вращаться около точки C опредѣляемой координатами (5), когда силы $\overline{F}$, $\overline{F'}$,..., неизмѣняя величинъ и оставаясь между собою параллельными, будутъ вращаться около соотвѣтственныхъ точекъ приложенія, остающихся неподвижными. Но вмѣсто такого вращенія силъ, можно вращать систему точекъ приложенія силъ около центра C, не измѣняя величинъ и направленій силъ.

По формуламъ (5) видно, что для опредѣленія точки C можно вмѣсто массъ F, F', F'',.... взять другія имъ пропорціональныя; поэтому центръ параллельныхъ силъ неизмѣнится, если всѣ силы будутъ увеличены или уменьшены въ одномъ отношеніи.

Можно, не измѣняя дѣйствія силъ, замѣнить ихъ другими, приложенными къ другимъ точкамъ, произвольно взятымъ на прямыхъ, по которымъ направлены силы; отъ этого перемѣнится и положеніе центра C; такъ, что одна и таже система параллельныхъ силъ можетъ имѣть безчисленное множество центровъ, соотвѣтствующихъ различнымъ положеніямъ точекъ приложенія; но всѣ эти положенія точки C находятся на одной прямой, по которой направлена равнодѣйствующая.

74. *Центръ тяжести.* Всякая вѣсомая матерьяльная точка притягивается всѣми прочими матерьяльными точками, принадлежащими нашей планетѣ и всѣмъ небеснымъ тѣламъ, по закону Нютона: обратно-пропорціонально квадратамъ разстояній и пропорціонально массамъ.

Если притягиваемая точка принадлежитъ точкамъ, находящимся близъ земной поверхности, то по отдаленности ея отъ небесныхъ тѣлъ, дѣйствіе на нее послѣднихъ весьма слабо сравнительно съ дѣйствіемъ массы сфероида вмѣстѣ съ тѣлами, находящимися на его поверхности или вблизи этой поверхности, а потому можетъ быть пренебрежено.

Равнодѣйствующія всѣхъ силъ дѣйствія земнаго сфероида и тѣлъ, близъ него находящихся нормальна къ поверхности уровня, которая близко подходитъ къ поверхности самаго сфероида и можетъ быть принята приблизительно за поверхность шара или, точнѣе, за поверхность эллипсоида вращенія, сжатаго при полюсахъ (см. § 37).

Но какова бы ни была разсматриваемая поверхность уровня, силы притяженія цѣлымъ земнымъ сфероидомъ матерьяльныхъ точекъ, принадлежащихъ одному земному тѣлу, измѣренія которыхъ весьма малы сравнительно съ измѣреніями сфероида, представляютъ весьма малые углы съ нормалью къ поверхности уровня, проведенною чрезъ какую нибудь точку тѣла; поэтому можно разсматривать приблизительно эти силы какъ параллельныя, направленныя въ одну сторону.

Такъ какъ ускоренія, съ которыми падали бы матерьяльные элементы тѣла, разнятся весьма мало, то онѣ могутъ быть приняты приблизительно равными, а потому силы, ихъ производящія, приблизительно пропорціональны малымъ соотвѣтственнымъ элементамъ тѣла. Равнодѣйствующая такихъ параллельныхъ силъ составляетъ *вѣсъ* разсматриваемаго тѣла, а ихъ центръ называется *центромъ тяжести тѣла.*

Если m есть вѣсомая масса тѣла, dm одинъ изъ ея элементовъ и g ускореніе въ его паденіи (называемое обыкновенно *силою тяжести*), то gdm выражаетъ одну изъ разсматриваемыхъ параллельныхъ силъ или вѣсъ элемента dm, а $gm = \int gdm$ — вѣсъ цѣлаго тѣла. Означая чрезъ x, y, z прямолинейныя координаты элемента dm относительно осей Ox, Oy, Oz, а чрезъ α, β, γ такія же координаты центра тяжести, по формуламъ (5) мы будемъ имѣть

$$\alpha = \frac{\int xgdm}{gm}, \quad \beta = \frac{\int ygdm}{gm}, \quad \gamma = \frac{\int zgdm}{gm}$$

или

$$\alpha = \frac{\int xdm}{m}, \quad \beta = \frac{\int ydm}{m}, \quad \gamma = \frac{\int zdm}{m}.$$

По этимъ формуламъ опредѣляется также центръ массы m или *центръ инерціи* (см. ф. (4) § 13 Вв. въ Ст. и Дин. и § 18 Стат.); слѣд. *центръ тяжести тѣла совпадаетъ съ центромъ инерціи.*

Способы опредѣленія положенія этой точки въ тѣлахъ разнаго вида изложены въ статьѣ В введенія въ Статику и Динамику.

Можно изобразить вѣсъ тѣла gm прямою, приложенною къ центру тяжести и направленною по нормали къ поверхности уровня (по отвѣсной линіи).

Вслѣдствіе свойства центра параллельныхъ силъ, доказаннаго въ предыдущемъ § величина и положеніе этой прямой не измѣняется при вращеніи тѣла около центра тяжести. Опредѣливъ опытомъ двѣ прямыя, представляющія въ тѣлѣ направленія вѣса, мы найдемъ въ пересѣченіи этихъ прямыхъ мѣсто центра тяжести.

75. *Силы, сходящіяся въ одной точкѣ.* Система силъ: $\overline{F}$, $\overline{F}'$,... сходящихся въ одной точкѣ O, приводится къ одной, изображенной главнымъ векторомъ R при началѣ O; потому что при этомъ началѣ моментъ каждой силы равенъ нулю, а слѣд. и главный моментъ $\overline{K}$ равенъ нулю.

Примѣромъ силъ, сходящихся въ одной точкѣ, могутъ служить силы притяженія или отталкиванія системы точекъ одною точкою. Пусть будетъ m сплошная совершенно твердая масса m, притягиваемая точкою O. Вслѣдствіе закона равенства дѣйствія и противодѣйствія всѣ силы этого притяженія прямо противоположны силамъ притяженія точки O элементами массы m; поэтому равнодѣйствующая послѣднихъ, будучи взята прямо—противоположно, представляетъ равнодѣйствующую $\overline{R}$ притяженія элементовъ массы m точкою O.

Положимъ напр. что m есть масса сферическаго слоя, ограниченная сферами, имѣющими центръ въ точкѣ C и что плотность элемента dm постоянна или функція его разстоянія отъ C. По доказанному въ § 28 сила, съ которою масса m притягиваетъ внѣшнюю точку O равна $\frac{m}{OC^2}$ и направлена по прямой OC отъ O къ C; слѣд. равнодѣйствующая силъ притяженія элементовъ массы m точкою O равна также $\frac{m}{OC^2}$ и направлена по прямой CO отъ C къ O. За точку приложенія этой силы можно взять всякую точку этой прямой. Если возьмемъ эту точку въ C, то O будетъ притягивать цѣлую массу m какъ одну точку, находящуюся въ C съ массою m.

Силы притяженія элементовъ массы сферическаго слоя m точкою O, находящеюся въ его полости, уравновѣшиваются. А силы притяженія массы m точкою O, находящеюся въ самой массѣ, приводятся къ одной $\frac{m'}{OC^2}$, направленной по CO, гдѣ m' есть часть массы слоя, содержащаяся въ сферѣ радіуса CO и центра C (см. § 28).

Если разсматриваемый слой m притягивается другимъ такимъ же слоемъ m', ограниченный сферами, имѣющими центръ въ C',—притомъ одна масса внѣ другой—, то силы притяженія цѣлой массы m элементами массы m', по доказанному, сходятся въ точкѣ C, а потому онѣ имѣютъ одну равнодѣйствующую $\overline{R}$, проходящую чрезъ эту точку. Сила притяженія цѣлой массы m однимъ элементомъ dm' есть $\frac{mdm'}{r^2}$, гдѣ r есть разстояніе элемента dm' отъ точки C; равнодѣйствующая R равна $\frac{mm'}{CC'^2}$ т. е. *произведенію массъ обоихъ слоевъ, раздѣленному на квадратъ разстоянія между ихъ центрами, и направлена по прямой, соединяющей эти точки.*

Силы притяженія цѣлой массы m' элементами массы m приводятся къ силѣ — равной и прямопротивоположной — $\overline{R}$. И такъ *сферическіе слои, ограниченные, каждый, концентрическими сферами, или сплошныя сферы, въ томъ случаѣ, когда плотности постоянны или суть функціи разстояній соотвѣтственныхъ элементовъ отъ центровъ слоевъ, притягиваются такъ, какъ бы массы ихъ были сосредоточены въ ихъ центрахъ инерціи.*

Такое заключеніе не примѣнимо вообще къ другимъ какимъ либо массамъ, потому что равнодѣйствующая силы притяженія точкою O элементами какой нибудь массы m не всегда проходитъ чрезъ центръ инерціи массы m, и силы притяженія элементовъ массы m элементами другой массы m', всѣ три измѣренія которой не безконечно-малы, не всегда приводятся къ одной силѣ.

76. Пусть будетъ O точка притягивающая или отталкивающая элементы массы m по какому нибудь закону; C центръ инерціи этой массы, Ox, Oy, Oz прямоугольныя оси такъ взятыя, что Ox направлена по OC; x, y, z координаты элемента dm относительно этихъ осей; r разстояніе его отъ точки O, $f(r)$ функція, выражающая законъ притяженія или отталкиванія. Проэкціи равнодѣйствующей $\overline{R}$ всѣхъ силъ дѣйствія точки O на массу m выражаются интегралами:

$$A = \mp \int f(r)\frac{x}{r}dm,\ B = \mp \int f(r)\frac{y}{r}dm,\ C = \mp \int f(r)\frac{z}{r}dm$$

Въ частномъ случаѣ $f(r) = r$, т. е. когда *элементарныя силы пропорціональны первой степени разстояній*, мы будемъ имѣть

$$A = \mp \int x dm = \mp m \cdot OC,$$

$$B = \mp \int y dm, \; C = \mp \int z dm.$$

По свойству плоскости, проходящей чрезъ центръ массы, что сумма моментовъ относительно такой плоскости равна нулю, мы будемъ имѣть $B = 0$, $C = 0$; слѣд. равнодѣйствующая $\overline{R}$ равна $m \cdot OC$ и направлена по оси Ox, т. е. по прямой, проходящей чрезъ центръ инерціи массы; слѣд. *когда частичное притяженіе или отталкиваніе пропорціонально первой степени разстоянія между частицами, тогда всякая масса притягивается одною точкою такъ, какъ бы вся масса была сосредоточена въ ея центръ инерціи.* При другомъ видѣ функціи $f(r)$ и какой ни есть массѣ m величины B и C вообще не равны нулю, а потому направленіе равнодѣйствующей R не совпадаетъ вообще съ прямою Ox, проходящею чрезъ центръ инерціи массы.

Когда точка схода O прямыхъ, по которымъ направлены силы $\overline{F}$, $\overline{F'}$,... удалена безконечно отъ точекъ приложенія силъ, тогда силы становятся между собою параллельными и равнодѣйствующая проходитъ чрезъ центръ этихъ силъ; слѣд. при весьма большомъ разстояніи точки O отъ точекъ приложенія силъ $\overline{F}$, $\overline{F'}$.... прямая $\overline{R}$ должна составлять весьма малый уголъ съ прямою, соединяющею точку O съ центромъ системы массъ равныхъ силамъ: F, F',.... и помѣщенныхъ въ точкахъ приложенія этихъ силъ.

Если масса m притягивается точкою O, находящеюся на весьма большомъ разстояніи OC отъ центра массы C сравнительно съ измѣреніями массы, то можно положить приблизительно, что равнодѣйствующая $\overline{R}$ силъ притяженія проходитъ чрезъ C и равна $mf(OC)$, гдѣ $f(r)$ есть функція выражающая законъ притяженія; потому что можно приблизительно силы притяженія элементовъ массы m точкою O принять за параллельныя и равныя соотвѣтственнымъ элементамъ, умноженнымъ на одну величину $f(OC)$.

Если масса m притягивается массою m' и центры C и C' этихъ массъ находятся на весьма большомъ разстояніи сравнительно съ измѣреніями массъ, то всѣ силы притяженія массы m элементами массы m' можно разсматривать приблизительно какъ сходящіяся въ точкѣ C. Сила притяженія массы m однимъ элементомъ dm' выразится чрезъ $mf(r)dm'$, гдѣ r есть разстояніе dm' отъ C.

Можно положить приблизительно что эти силы направлены по одной прямой CC' и что $r = CC'$; отъ этого для равнодѣйствующей всѣхъ силъ притяженія массы m массою m' можно взять силу равную $mm'f(CC')$ и направленную по прямой CC' отъ C къ C'. Сила, ей равная и противоположная представитъ приблизительно равнодѣйствующую силъ притяженія элементовъ массы m' цѣлою массою m.

Такъ какъ измѣренія солнца, планетъ и ихъ спутниковъ и другихъ небесныхъ тѣлъ весьма малы относительно взаимныхъ разстояній между центрами массъ этихъ тѣлъ, то можно примѣнить приблизительно выведенное заключеніе къ этимъ тѣламъ; кромѣ того, по причинѣ сферической формы солнца планетъ и спутниковъ, можно центры объемовъ принять приблизительно за центры массъ, если допустить, что масса однородна или распредѣлена равномѣрно концентрическими слоями около центра.

77. Если прямыя, по которымъ направлены силы $\overline{F}$, $\overline{F'}$, . . . пересѣкаютъ одну прямую (l), на конечномъ или безконечномъ разстояніи, и главный векторъ $\overline{R}$, при началѣ въ какой нибудь точкѣ этой прямой, по ней направленъ, то разсматриваемыя силы имѣютъ одну равнодѣйствующую, параллельную прямой (l) или направленную по этой прямой; потому что при началѣ въ какой нибудь точкѣ O прямой (l) всѣ моменты $\overline{MF}$, $\overline{MF'}$, ... перпендикулярны къ (l); слѣд. геометрическая ихъ сумма $\overline{K} = \Sigma\overline{MF}$, если не ровна нулю, также перпендикулярна къ этой прямой, т. е. главный моментъ $\overline{K}$ перпендикуляренъ къ $\overline{R}$.

Равнодѣйствующая будетъ сила, имѣющая моментъ $\overline{K}$ и геометрически равная главному вектору $\overline{R}$.

78. На основанiи доказаннаго въ § 68 (случай $n = 3$) всякая данная сила можетъ быть разложена, на двѣ, направленныя по даннымъ прямымъ, лежащимъ въ одной плоскости съ данною силою, и пересѣкающимъ прямую, по которой она направлена въ одной точкѣ на конечномъ или безконечномъ разстоянiи. Можно также всякую силу $\overline{F}$ разложить на три силы, направленныя по сторонамъ какого ни есть треугольника ABC, находящагося въ плоскости, проходящей чрезъ силу $\overline{F}$.

Для этого замѣтимъ пересѣченiе прямой, по которой направлена сила $\overline{F}$ съ одною изъ сторонъ треугольника, напр. точку D пересѣченiя съ стороною BC; перенесемъ въ эту точку силу $\overline{F}$, т. е. замѣнимъ ее силою, геометрически равною, приложенною къ точкѣ D, и разложимъ ее на двѣ $\overline{\alpha}$ и $\overline{\delta}$ такъ, чтобы $\overline{\alpha}$ была направлена по прямой BC, а $\overline{\delta}$ по прямой DA; послѣ того перенесемъ силу $\overline{\delta}$ въ точку A и разложимъ ее на двѣ $\overline{\beta}$ и $\overline{\gamma}$, направленныя по прямымъ AC и AB; такимъ образомъ мы будемъ имѣть три силы: $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, направленныя соотвѣтственно по сторонамъ BC, AC, AB даннаго треугольника и эквивалентныя вмѣстѣ данной силѣ $\overline{F}$. Одна изъ силъ $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ равна нулю, когда точка D совпадаетъ съ одною изъ вершинъ B, C; напр. если D совпадаетъ съ B, то $\overline{\beta} = 0$ и $\overline{F}$ разлагается непосредственно на двѣ силы $\overline{\alpha}$ и $\overline{\gamma}$, направленныя по прямымъ BC и BA.

Всякiя три силы $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, направленныя по сторонамъ BC, CA и AB даннаго треугольника ABC, не могутъ быть въ равновѣсiи, такъ какъ равнодѣйствующая $\overline{\beta} + \overline{\gamma}$ двухъ силъ не можетъ быть равна и прямо-противоположна третьей $\overline{\alpha}$. Если геометрическая сумма $\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma}$ не равна нулю, то эти три силы имѣютъ равнодѣйствующую $\overline{F}$, которую найдемъ, сложивъ равнодѣйствующую двухъ силъ съ третьею.

Разлагая данную силу $\overline{F}$ на три $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, направленныя по сторонамъ даннаго треугольника, согласимся разсматривать ихъ какъ положительныя, если онѣ направлены одинаково съ сторонами: BC, CA, AB, т. е. первая отъ B къ C, вторая отъ C къ A, третья отъ A къ B, и какъ отрицательныя, если онѣ направлены противополож-

но; напр. подъ $\overline{\alpha}$ мы будемъ подразумѣвать силу, взятую съ —, если эта сила направлена отъ C къ B.

Зная величины и знаки $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ можно построить прямую (l), по которой направлена сила $\overline{F}$, а именно: опредѣливъ точку D пересѣченія BC съ равнодѣйствующею силъ $\overline{\beta}$ и $\overline{\gamma}$ и точку E пересѣченія CA съ равнодѣйствующею силъ $\overline{\gamma}$ и $\overline{\alpha}$, проведемъ прямую DE; эта прямая будетъ искомая (l); поэтому можно разсматривать три величины α, β, γ какъ координаты прямой (l). Онѣ представляются какъ коеффиціенты въ уравненіи этой прямой, если для опредѣленія положенія точки въ плоскости ABC взята система координатъ, указанная въ § 65 Кинематики.

Пусть будутъ: q_1, q_2, q_3 кратчайшія разстоянія точки M отъ прямыхъ BC, CA, AB съ + или —, такъ, чтобы онѣ были положительныя для вершинъ треугольника; напр. чтобы q_1 была положительная, когда M совпадаетъ съ A, и также, когда обѣ точки лежатъ по одну сторону относительно прямой BC. На основаніи свойства силъ, находящихся въ одной плоскости, доказаннаго въ концѣ § 72, мы будемъ имѣть:

$$\alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 0$$

для всякой точки прямой (l); слѣд. это есть уравненіе прямой (l).

Обратно, если дано уравненіе

$$\alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 0,$$

принадлежащее какой нибудь прямой (l), то можно разсматривать коеффиціенты α, β, γ какъ величины трехъ силъ, направленныхъ по сторонамъ треугольника ABC и эквивалентныхъ нѣкоторой силѣ $\overline{F}$, направленной по прямой (l). Величина этой силы выражается формулою

$$F = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A - 2\gamma\alpha \cos B - 2\alpha\beta \cos C}$$

гдѣ A, B, C суть внутренніе углы треугольника ABC.

Если q_1, q_2, q_3 суть координаты какой нибудь точки O въ плоскости ABC, взятой за начало моментовъ, то $\alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3$

будетъ сумма моментовъ трехъ силъ $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ и должна быть равна моменту силы F. По знаку этой суммы можно опредѣлить сторону, въ которую направлена сила $\overline{F}$ для наблюдателя, находящагося въ точкѣ O и смотрящаго на точку приложенія силы.

Означая чрезъ h плечо силы F, мы будемъ имѣть

$$h = \pm \frac{1}{F}(\alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3).$$

Если по той же прямой (l) направлена другая сила $\overline{F'}$, которая разлагается на три силы $\overline{\alpha'}$, $\overline{\beta'}$, $\overline{\gamma'}$, направленныя по сторонамъ треугольника ABC, то

$$\alpha' = \pm \alpha\frac{F'}{F},\ \beta' = \pm \beta\frac{F'}{F},\ \gamma' = \pm \gamma\frac{F'}{F},$$

гдѣ должно взять знакъ $+$ когда силы $\overline{F}$ и $\overline{F'}$ направлены въ одну сторону, и $-$, когда онѣ противоположны.

Пусть будетъ система силъ: $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$, ..., находящихся въ плоскости треугольника ABC, и вообще $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$, $\gamma^{(i)}$ силы, эквивалентныя силѣ $\overline{F^{(i)}}$, направленныя по сторонамъ этого треугольника: BC, CA, AC.

Если три алгебраическія суммы

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots = \Sigma\alpha$$

$$\beta + \beta' + \beta'' + \ldots = \Sigma\beta$$

$$\gamma + \gamma' + \gamma'' + \ldots = \Sigma\gamma$$

не равны нулю, то онѣ даютъ три силы, направленныя по сторонамъ треугольника ABC и эквивалентныя равнодѣйствующей $\overline{R}$ данныхъ силъ. Уравненіе прямой, по которой направлена эта равнодѣйствующая есть

$$q_1\Sigma\alpha + q_2\Sigma\beta + q_3\Sigma\gamma = 0,$$

а величина равнодѣйствующей выражается формулою

$$R = \sqrt{\left[(\Sigma\alpha)^2 + (\Sigma\beta)^2 + (\Sigma\gamma)^2 - 2(\Sigma\beta)(\Sigma\gamma)\cos A - 2(\Sigma\gamma)(\Sigma\alpha)\cos B - 2(\Sigma\alpha)(\Sigma\beta)\cos C\right]}.$$

Трехчленъ

$$q_1\Sigma\alpha + q_2\Sigma\beta + q_3\Sigma\gamma$$

выражаетъ величину момента равнодѣйствующей, т. е. величину главнаго момента $\overline{K}$, при началѣ въ точкѣ O (q_1, q_2, q_3). Знакъ этого выраженія опредѣляетъ сторону, въ которую направлена равнодѣйствующая по прямой (l).

Пусть будутъ

$$aq_1 + bq_2 + cq_3 = 0$$
$$a'q_1 + b'q_2 + c'q_3 = 0$$
$$a''q_1 + b''q_2 + c''q_3 = 0$$
. . . .

уравненія прямыхъ (l), (l'), (l''), . . ., по которымъ направлены данныя силы $\overline{F}$, $\overline{F'}$, . . ., а $\overline{P}$, $\overline{P'}$, ... фиктивныя силы, направленныя по тѣмъ же прямымъ, разлагающіяся по сторонамъ треугольника ABC, соотвѣтственно на силы: (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'')... На основаніи доказаннаго выше, мы будемъ имѣть:

$$\alpha = \pm a\frac{F}{P},\quad \beta = \pm b\frac{F}{P},\quad \gamma = \pm c\frac{F}{P}$$
$$\alpha' = \pm a'\frac{F'}{P'},\ \beta' = \pm b'\frac{F'}{P'},\ \gamma' = \pm c'\frac{F'}{P'};$$
. . . .

слѣд.

$$\Sigma\alpha = \Sigma \pm a\frac{F}{P},\ \Sigma\beta = \Sigma \pm b\frac{F}{P},\ \Sigma\gamma = \Sigma \pm c\frac{F}{P}.$$

Такимъ образомъ можно найти аналитическимъ путемъ равнодѣйствующую данной системы силъ, лежащихъ въ одной плоскости.

79. Въ § 69 мы видѣли, что можно опредѣлить семь силъ, находящихся въ равновѣсіи и направленныхъ по семи даннымъ, между собою независимымъ, прямымъ: (1) (2). . . . .(7); причемъ величина одной силы $\overline{F}$ произвольна. Сила равная и прямопротивоположная послѣдней представляетъ силу эквивалентную прочимъ шести силамъ. Изъ этого видно, что всякая сила можетъ быть разложена на шесть силъ, направленныхъ по даннымъ прямымъ.

Простѣйшій и наиболѣе замѣчательный случай такого разложенія есть: *разложеніе силы на шесть силъ, направленныхъ по ребрамъ даннаго тетраедра.*

Пусть будетъ $\overline{F}$ данная сила и $ABCD$ какой нибудь тетраедръ. Прямая, по которой направлена сила $\overline{F}$ должна встрѣтить непремѣнно одну изъ граней тетраедра. Положимъ, что она встрѣчаетъ грань ABC въ точкѣ E. Перенеся въ эту точку силу $\overline{F}$, разложимъ ее на двѣ: $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ такъ, чтобы первая была направлена по прямой ED, а вторая по прямой, находящейся въ плоскости ABC; перенесемъ потомъ силу $\overline{P}$ въ точку D и разложимъ ее на три силы, направленныя по ребрамъ: DA, DB, DC, а силу $\overline{Q}$ разложимъ, какъ было показано въ предъидущемъ § на три, направленныя по сторонамъ треугольника ABC; отъ этого мы будемъ имѣть шесть силъ, направленныхъ по ребрамъ даннаго тетраедра $ABCD$ и составляющихъ систему, эквивалентную данной силѣ $\overline{F}$.

Означимъ чрезъ $\overline{a}_1$, $\overline{b}_1$, $\overline{c}_1$ ребра DA, DB, DC, направленныя отъ D къ A, B и C, а чрезъ $\overline{a}_2$, $\overline{b}_2$, $\overline{c}_2$ ребра BC, CA и AB, направленныя вправо для наблюдателя, имѣющаго голову въ D и стоящаго на плоскости ABC. Пусть будутъ: α_1, β_1, γ_1 силы, составляющія силу $\overline{P}$, взятыя съ $+$ или съ $-$, смотря потому идутъ ли онѣ въ одну сторону съ соотвѣтственными ребрами $\overline{a}_1$, $\overline{b}_1$, $\overline{c}_1$ или противоположно, а α_2, β_2, γ_2 силы, составляющія силу $\overline{Q}$, взятыя съ $+$ или $-$, смотря потому идутъ ли онѣ въ одну сторону съ ребрами $\overline{a}_2$, $\overline{b}_2$, $\overline{c}_2$ или противоположно.

Шесть силъ: α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 эквивалентныхъ данной силѣ $\overline{F}$ могутъ быть выражены помощію относительнымъ моментовъ

$$\left(\frac{F}{a_1}\right),\ \left(\frac{F}{b_1}\right),\ \left(\frac{F}{c_1}\right),\ \left(\frac{F}{a_2}\right),\ \left(\frac{F}{b_2}\right),\ \left(\frac{F}{c_2}\right),$$

составляемыхъ прямою, по которой направлена сила $\overline{F}$, съ ребрами тетраедра $ABCD$.

По доказанному выше моментъ равнодѣйствующей относительно какой либо оси, равенъ суммѣ моментовъ силъ ей эквивалентныхъ относительно той же оси; слѣд.

$$F\binom{F}{a_1} = \alpha_1\binom{a_1}{a_1} + \beta_1\binom{b_1}{a_1} + \gamma_1\binom{c_1}{a_1} + \alpha_2\binom{a_2}{a_1} + \beta_2\binom{b_2}{a_1} + \gamma_2\binom{c_2}{a_1};$$

но, принимая во вниманіе, что относительный моментъ двухъ прямыхъ, лежащихъ въ одной плоскости, равенъ нулю, имѣемъ:

$$\binom{a_1}{a_1} = 0,\ \binom{b_1}{a_1} = 0,\ \binom{c_1}{a_1} = 0,\ \binom{b_2}{a_1} = 0,\ \binom{c_2}{a_1} = 0;$$

поэтому

$$F\binom{F}{a_1} = \alpha_2\binom{a_2}{a_1} \text{ и } \alpha_2 = F\binom{F}{a_1} : \binom{a_2}{a_1}.$$

Означая чрезъ V объемъ тетраедра $ABCD$, на основаніи сказаннаго въ § 59 мы имѣемъ

$$V = \binom{a_2}{a_1} a_1 a_2,$$

а потому

$$\alpha_2 = \frac{F a_1 a_2}{V}\binom{F}{a_1}.$$

Подобнымъ образомъ выразятся всѣ шесть силъ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \ldots$ эквивалентныхъ съ $\overline{F}$, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{F a_1 a_2}{V}\binom{F}{a_2},\ \beta_1 = \frac{F b_1 b_2}{V}\binom{F}{b_2},\ \gamma_1 = \frac{F c_1 c_2}{V}\binom{F}{c_2} \\ \alpha_2 &= \frac{F a_1 a_2}{V}\binom{F}{a_1},\ \beta_2 = \frac{F b_1 b_2}{V}\binom{F}{b_1},\ \gamma_2 = \frac{F c_1 c_2}{V}\binom{F}{c_1} \end{aligned}\right\} \ldots .(6)$$

Эти шесть величинъ связаны уравненіемъ, которое выражаетъ условіе, что силы $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ лежатъ въ одной плоскости. Пусть будутъ α_1, β_1, γ_1 слагаемыя на ребрахъ $\overline{a_1}$, $\overline{b_1}$, $\overline{c_1}$ произвольной силы $\overline{P}$, приложенной къ точкѣ D, а α_2, β_2, γ_2 три силы на ребрахъ: $\overline{a_2}$, $\overline{b_2}$, $\overline{c_2}$, эквивалентныя произвольной силѣ $\overline{Q}$, находящейся въ плоскости ABC. Вслѣдствіе эквивалентности системы силъ $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ съ системою

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

у обоихъ системъ долженъ быть общій главный векторъ $\overline{R}$ и общій главный моментъ $\overline{K}$, а слѣд. общій инварьянтъ $\overline{RK}$; поэтому, на основаніи формулы (39) предъидущей главы, относительный моментъ

$PQ\binom{P}{Q}$ долженъ быть равенъ суммѣ относительныхъ моментовъ силъ (7). Принимая во вниманіе, что относительный моментъ двухъ силъ, находящихся въ одной плоскости, равенъ нулю, находимъ, что

$$PQ\binom{P}{Q} = \alpha_1\alpha_2\binom{a_1}{a_2} + \beta_1\beta_2\binom{b_1}{b_2} + \gamma_1\gamma_2\binom{c_1}{c_2}$$
$$= \left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{a_1a_2} + \frac{\beta_1\beta_2}{b_1b_2} + \frac{\gamma_1\gamma_2}{c_1c_2}\right)V \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Чтобы силы $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ имѣли одну равнодѣйствующую $\overline{F}$, надобно, чтобы онѣ лежали въ одной плоскости, а слѣд. должно быть $\binom{P}{Q} = 0$, что дастъ уравненіе, связывающее силы (6), эквивалентныя силѣ $\overline{F}$:

$$\frac{\alpha_1\alpha_2}{a_1a_2} + \frac{\beta_1\beta_2}{b_1b_2} + \frac{\gamma_1\gamma_2}{c_1c_2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Это уравненіе также удовлетворено, когда силы $\overline{P}$ и $\overline{Q}$, находясь въ одной плоскости не имѣютъ однакожъ равнодѣйствующей $\overline{F}$, а именно: когда онѣ параллельны, равны и противоположны.

Помощію формулъ (6) ур. (9) можетъ быть представлено подъ видомъ

$$a_1a_2\binom{F}{a_1}\binom{F}{a_2} + b_1b_2\binom{F}{b_1}\binom{F}{b_2} + c_1c_2\binom{F}{c_1}\binom{F}{c_2} = 0, \ldots (10)$$

связывающимъ относительные моменты, составляемые прямою, по которой направлена сила $\overline{F}$, съ ребрами тетраедра $ABCD$.

Величины:

$$\frac{\alpha_1}{F}, \frac{\beta_1}{F}, \frac{\gamma_1}{F}, \frac{\alpha_2}{F}, \frac{\beta_2}{F}, \frac{\gamma_2}{F}$$

при условіи (9), или величины:

$$\binom{F}{a_1}, \binom{F}{b_1}, \binom{F}{c_1}, \binom{F}{a_2}, \binom{F}{b_2}, \binom{F}{c_2}$$

при условіи (10), могутъ быть приняты за координаты прямой, по которой направлена сила $\overline{F}$.

Келе (Cayley)*) и Цейтенъ (Zeuten)**) употребили этого рода лучевыя координаты вмѣсто Плюкеровскихъ въ своихъ изслѣдованіяхъ о комплексахъ.

---

*) Transaction of the Cambrige Philosophical Sosiety Vol. XI, Part. II.

**) Mathematische Annalen von A. Clebsch und Neumann. I Band.

Легко выразить этого рода координаты въ функціи Плюкеровскихъ слѣдующимъ образомъ:

Пусть будутъ: x, y, z прямолинейныя прямоугольныя координаты какой нибудь точки прямой, по которой направлена сила $\overline{F}$; X, Y, Z — проекціи $\overline{F}$ на осяхъ координатъ;

$$a_{1,x},\ b_{1,x},\ c_{1,x},\ a_{2,x},\ b_{2,x},\ c_{2,x}$$

проекціи реберъ: $\overline{a_1}$, $\overline{b_1}$, $\overline{c_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{b_2}$, $\overline{c_2}$ на оси x-въ; $a_{1,y}$, $b_{1,y}$, $c_{1,y}$, $a_{2,y}$, $b_{2,y}$, $c_{2,y}$ ихъ проекціи на оси y-въ и $a_{1,z}$, $b_{1,z}$, $c_{1,z}$, $a_{2,z}$, $b_{2,z}$, $c_{2,z}$ ихъ проекціи на оси z-въ. По формулѣ предъидущей главы мы будемъ имѣть:

$$Fa_1\binom{F}{a_1} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ a_{1,x} & a_{1,y} & a_{1,z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

слѣд.

$$\frac{\alpha_2}{F} = \frac{a_2}{FV}\left(a_{1,x}\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} + a_{1,y}\begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} + a_{1,z}\begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}\right)$$

Подобныя выраженія мы найдемъ для $\frac{\alpha_1}{F}$, $\frac{\beta_1}{F}$, $\frac{\gamma_1}{F}$, $\frac{\beta_2}{F}$, $\frac{\gamma_2}{F}$.

80. Пусть будетъ какая либо система силъ: $\overline{F}$, $\overline{F'}$ .... Замѣнивъ каждую изъ нихъ шестью силами, направленными по ребрамъ даннаго тетраедра $ABCD$, означимъ вообще чрезъ $\alpha_1^{(i)}$, $\beta_1^{(i)}$, $\gamma_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$, $\beta_2^{(i)}$, $\gamma_2^{(i)}$ тѣ, которыя замѣняютъ силу $F^{(i)}$ и направлены соотвѣтственно по ребрамъ: a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2. Сложивъ въ одну силу силы, направленныя по одному и тому же ребру тетраедра, мы получимъ шесть силъ:

$$\Sigma\alpha_1,\ \Sigma\beta_1,\ \Sigma\gamma_1,\ \Sigma\alpha_2,\ \Sigma\beta_2,\ \Sigma\gamma_2,\ \ldots\ldots\ldots\ (11)$$

направленныхъ соотвѣтствѣнно по ребрамъ: a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 и эквивалентныхъ данной системѣ силъ: $\overline{F}$, $\overline{F'}$,...

Если данная система силъ имѣетъ одну равнодѣйствующую, то силы (11) должны удовлетворять условію (9), т. е.

$$\frac{\Sigma\alpha_1 . \Sigma\alpha_2}{a_1 a_2} + \frac{\Sigma\beta_1 . \Sigma\beta_2}{b_1 b_2} + \frac{\Sigma\gamma_1 . \Sigma\gamma_2}{c_1 c_2} = 0.$$

Если это условіе неудовлетворено, то данныя силы $\overline{F}, \overline{F'} \ldots$ приводятся къ двумъ силамъ $\overline{\lambda}$ и $\overline{\mu}$, изъ которыхъ одна есть равнодѣйствующая силъ: $\Sigma\alpha_1$, $\Sigma\beta_1$, $\Sigma\gamma_1$, сходящихся въ точкѣ D, а другая равнодѣйствующая силъ: $\Sigma\alpha_2$, $\Sigma\beta_2$, $\Sigma\gamma_2$, лежащихъ въ плоскости ABC; слѣд. *всякая система силъ, не приводящаяся къ одной силѣ, приводится къ двумъ силамъ.*

Такъ какъ силы $\overline{\lambda}$ и $\overline{\mu}$ не могутъ, ни въ какомъ случаѣ, быть равны и прямо-противоположны, то для равновѣсія системы силъ: $\overline{F}$, $\overline{F'} \ldots$, надобно, чтобы $\lambda = 0$, $\mu = 0$, а для этого необходимо:

$$\Sigma\alpha_1 = 0,\ \Sigma\beta_1 = 0,\ \Sigma\gamma_1 = 0,\ \Sigma\alpha_2 = 0,\ \Sigma\beta_2 = 0,\ \Sigma\gamma_2 = 0.$$

Такимъ образомъ условія равновѣсія выражаются уравненіями одного вида, что представляетъ нѣкоторое преимущество координатъ Келе предъ Плюкеровскими.

Эти уравненія, не только необходимы, но и достаточны для равновѣсія, если точки приложенія силъ $\overline{F}, \overline{F'} \ldots$ связаны неизмѣняемо. По условію эквивалентности главный векторъ $\overline{R}$, главный моментъ $\overline{K}$ и инварьянтъ $\overline{RK}$ данной системы силъ: $\overline{F}, \overline{F'}, \ldots$ принадлежатъ и системѣ шести силъ (11) и двумъ силамъ $\overline{\lambda}$ и $\overline{\mu}$. По формулѣ (38) главы III и формулѣ (8) предъидущаго параграфа находимъ, что

$$\overline{KR} = \left(\frac{\Sigma\alpha_1\Sigma\alpha_2}{a_1a_2} + \frac{\Sigma\beta_1\Sigma\beta_2}{b_1b_2} + \frac{\Sigma\gamma_1\Sigma\gamma_2}{c_1c_2}\right) V.$$

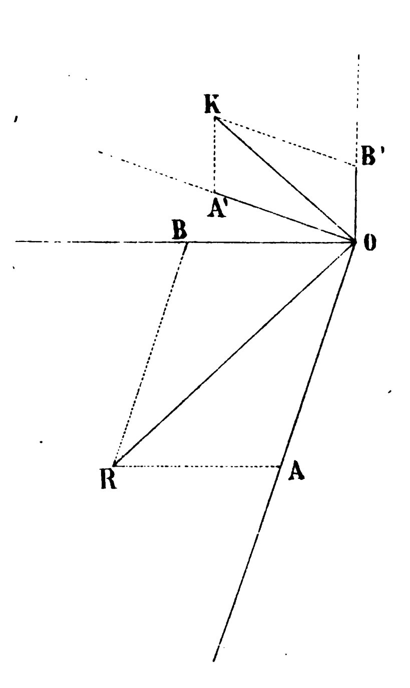
а также

$$\overline{KR} = \lambda\mu\binom{\lambda}{\mu}.$$

Одна и таже система силъ $\overline{F}, \overline{F'} \ldots$ можетъ быть приведена различнымъ образомъ къ двумъ равнодѣйствующимъ: $\overline{\lambda}$ и $\overline{\mu}$, зависящимъ отъ выбора тетраедра $ABCD$. Впрочемъ можно получить двѣ силы $\overline{\lambda}$ и $\overline{\mu}$, эквивалентныя данной системѣ силъ $\overline{F}, \overline{F'} \ldots$, независимо отъ тетраедра $ABCD$, слѣдующимъ образомъ: взявъ произвольно плоскость ABC и какую нибудь точку D внѣ этой плоскости, разложимъ каждую силу $\overline{F^{(i)}}$ на двѣ: $\overline{P^{(i)}}$ и $\overline{Q^{(i)}}$ такъ, чтобы первая проходила чрезъ точку D, а вторая лежала бы въ плоскости ABC;

Къ стр. 355.

Фиг. 35.



потомъ найдемъ равнодѣйствующую λ всѣхъ силъ $\overline{P}$, $\overline{P'}$, . . ., сходящихся въ одной точкѣ D и равнодѣйствующую $\bar{\mu}$ всѣхъ силъ $\overline{Q}_1$ $\overline{Q}_1$,..., лежащихъ въ плоскости ABC (см. § 76).

81. Можно также прямо найти двѣ силы $\bar{\lambda}$ и $\bar{\mu}$, эквивалентныя данной системѣ силъ, зная главный векторъ $\overline{R}$ и главный моментъ $\overline{K}$ при какомъ нибудь началѣ O.

Искомыя силы должны удовлетворять уравненіямъ:

$$\overline{в\lambda} + \overline{в\mu} = \overline{R},\ \overline{M\lambda} + \overline{M\mu} = \overline{K} \ldots\ldots\ldots (12)$$

при условіяхъ:

$$\overline{в\lambda \cdot M\lambda} = 0,\ \overline{в\mu \cdot M\mu} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

перпендикулярности вектора каждой силы къ ея моменту.

Разложивъ (черт. 34) главный векторъ $\overline{R}$ на два слагаемые: OA и OB, проведемъ чрезъ O двѣ плоскости (P) и (Q), къ нимъ перпендикулярныя, и какую нибудь третью плоскость (S) чрезъ главный моментъ $\overline{K}$ и опредѣлимъ пересѣченіе послѣдней съ первыми двумя; отъ этого мы получимъ двѣ прямыя, перпендикулярныя, соотвѣтственно къ OA и OB. Такъ какъ эти прямыя находятся въ одной плоскости съ главнымъ моментомъ $\overline{K}$, то можно разложить $\overline{K}$ на два слагаемые, по нимъ направленные: OA' и OB'. Изъ этого построенія видно, что можно удовлетворить ур. (12) и (13), положивъ

$$в\lambda = OA,\ в\mu = OB$$

$$M\lambda = OA',\ M\mu = OB'.$$

Построивъ помощію аргументовъ OA и OA' силу $\bar{\lambda}$ и помощію аргументовъ OB и OB' силу $\bar{\mu}$, мы получимъ двѣ силы $\bar{\lambda}$ и $\bar{\mu}$, эквивалентныя вмѣстѣ данной системѣ силъ.

Силы $\bar{\lambda}$ и $\bar{\mu}$ обусловлены тѣмъ, что *произведеніе силъ на относительный моментъ между прямыми, по которымъ онѣ направлены равно инварьянту $\overline{KR}$ данной системы силъ* (форм. (38) главы III), т. е.

$$\lambda\mu\left(\begin{smallmatrix}\lambda\\ \mu\end{smallmatrix}\right) = \overline{KR} = \Sigma FF'\left(\begin{smallmatrix}F\\ F'\end{smallmatrix}\right)$$

Раздѣливъ это ур. на 6, получимъ

$$(\lambda, \mu) = \Sigma(F, F').$$

Это показываетъ, что *объемъ тетраедра* (λ, μ), *въ которомъ два противоположныя ребра суть силы* $\overline{\lambda}$ *и* $\overline{\mu}$ *эквивалентныя данной системѣ силъ, равенъ алгебраической суммѣ объемовъ всѣхъ тетраедровъ, построенныхъ на данныхъ силахъ, взятыхъ попарно за противоположныя ребра тетраедра*. Эта теорема принадлежитъ Мёбіусу*). Ей соотвѣтствуетъ теорема, относящаяся къ угловымъ скоростямъ вращенія, доказанная въ § 148 Кинематики.

Замѣтимъ, что когда инварьянтъ $\overline{KR}$ не равенъ нулю, то силы $\overline{\lambda}$ и $\overline{\mu}$ не могутъ лежать въ одной плоскости; потому что относительный моментъ $\binom{\lambda}{\mu}$ не равенъ нулю.

Относительное положеніе прямыхъ (l) и (m), по которымъ направлены силы $\overline{\lambda}$ и $\overline{\mu}$, обусловлены тѣмъ, что онѣ суть сопряженныя поляры линейнаго комплекса $[K, R]$, параметры котораго суть: главный моментъ $\overline{K}$ и главный векторъ $\overline{R}$ (о которомъ было упомяпуто въ § 66). Въ этомъ можно удостовѣриться слѣдующимъ образомъ:

Помноживъ геометрически ур. (12) на $M\lambda$ и $\theta\lambda$ и взявъ сумму произведеній, находимъ, что

$$\overline{RM\lambda} + \overline{K\theta\lambda} = \overline{\theta\mu \cdot M\lambda} + \overline{M\mu \cdot \theta\lambda}.$$

А перемноживъ геометрически ур. (12) одно на другое, находимъ, что

$$\overline{KR} = \overline{\theta\mu \cdot M\lambda} + \overline{M\mu \cdot \theta\lambda};$$

слѣд.

$$\overline{RM\lambda} + \overline{K\theta\lambda} = \overline{KR}.$$

Такъ какъ по предположенію инварьянтъ $\overline{KR}$ неравенъ нулю, то аргументы прямой $\overline{\lambda}$ не могутъ удовлетворять ур.

$$\overline{RM\lambda} + \overline{K\theta\lambda} = 0,$$

*) Journal von Crelle, T. IV.

принадлежащему комплексу $[K, R]$; поэтому прямая (l) не можетъ быть лучемъ комплекса $[K, R]$. То же докажется для прямой (m).

Пусть будетъ $\overline{\sigma}$ произвольный отрѣзокъ на какой нибудь прямой (A), пересѣкающей прямыя (l) и (m). По условію, что двѣ прямыя лежатъ въ одной плоскости (см. § 59 ур. 14), мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\overline{M\lambda}\cdot\overline{\theta\sigma} + \overline{\theta\lambda}\cdot\overline{M\sigma} = 0\\ \overline{M\mu}\cdot\overline{\theta\sigma} + \overline{\theta\mu}\cdot\overline{M\sigma} = 0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

Сложивъ эти уравненія, получимъ

$$\overline{(\overline{M\lambda} + \overline{M\mu})\theta\sigma} + \overline{(\overline{\theta\lambda} + \overline{\theta\mu})M\sigma} = 0\ldots\ldots\ldots(15)$$

А это вслѣдствіе условій (12) приводится къ уравненію

$$\overline{K\theta\sigma} + \overline{RM\sigma} = 0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

показывающему, что прямая (A), пересѣкающая прямыя (l) и (m) есть лучь комплекса $[K, R]$.—Обратно всякій лучь (A) комплекса $[K, R]$, пересѣкающій одну изъ прямыхъ (l) и (m), пересѣкаетъ и другую; потому что, если на прямой (A) будетъ взятъ отрѣзокъ $\overline{\sigma}$, удовлетворяющій ур. (16) или (15) вмѣстѣ съ однимъ изъ ур. (14), то другое изъ двухъ послѣднихъ уравненій будетъ удовлетворено. А прямыя (l) и (m), имѣющія свойство, что всѣ ихъ пересѣкающія суть лучи линейнаго комплекса, суть сопряженныя поляры этого комплекса.

Можно взять силу $\overline{\lambda}$ произвольно, на какой нибудь прямой (l), не принадлежащей къ лучамъ комплекса $[K, R]$ и помощію ея аргументовъ $\overline{\theta\lambda}$ и $\overline{\mu\lambda}$ опредѣлить аргументы сопряженной съ ней силы $\overline{\mu}$, а именно мы будемъ имѣть:

$$\overline{\theta\mu} = \overline{R} - \overline{\theta\lambda},\quad \overline{M\mu} = \overline{K} - \overline{M\lambda}.$$

Чтобы построить прямую (m), зная положеніе прямой (l), возьмемъ двѣ точки (p) и (q) на послѣдней и построимъ лучевыя плоскости (P) и (Q) комплекса $[K, R]$, имѣющія полюсами точки (p) и (q): пересѣченіе плоскостей (P) и (Q) будетъ (m). Отложивъ на ней длину геометрически равную разности $\overline{R} - \overline{\theta\lambda}$, получимъ силу $\overline{\mu}$.

На другой парѣ (l') и (m') сопряженныхъ поляръ комплекса $[K, R]$ можно взять другія двѣ силы $\overline{\lambda'}$ и $\overline{\mu'}$ вмѣстѣ эквивалентныя данной системѣ силъ, а слѣд. также эквивалентныя силамъ $\overline{\lambda}$ и $\overline{\mu}$.

Четыре прямыя (l), (m), (l') и (m') представляютъ положенія производящей нѣкотораго линейчатаго гиперболоида (H); потому что всякая прямая (A), пересѣкающая три прямыя (l), (m), (l') есть лучь комплекса $[K, R]$, встрѣчающій и прямую (m'), а слѣд. (m') всѣми точками лежитъ на гиперболоидѣ (H), произведеннымъ движеніемъ прямой (A) по тремъ направляющимъ (l), (m), (l'). Это согласно съ тѣмъ, что было доказано въ § 68 (случай $n=4$) относительно равновѣсія четырехъ силъ. Въ самомъ дѣлѣ: силы $-\overline{\lambda'}$ и $-\overline{\mu'}$ прямо-противоположныя силамъ $\overline{\lambda'}$ и $\overline{\mu'}$, должны уравновѣшивать силы $\overline{\lambda}$ и $\overline{\mu}$, а на основаніи § 68 (случай $n=4$) прямыя (l), (m), (l'), (m'), по которымъ направлены четыре силы $\overline{\lambda}$, $\overline{\mu}$, $-\overline{\lambda'}$, $-\overline{\mu'}$, находящіяся въ равновѣсіи, должны лежать на одномъ линейчатомъ гиперболоидѣ.

Примѣняя общій способъ построенія двухъ силъ, эквивалентныхъ данной системѣ силъ, указанный въ началѣ этого §, къ частному случаю, когда $\overline{K}$ есть наименьшій главный моментъ, т. е. когда онъ и главный векторъ $\overline{R}$ направлены по оси комплекса $[K, R]$, мы получимъ слѣдующимъ образомъ силы $\overline{\lambda}$ и $\overline{\mu}$.

Разложивъ (фиг. 35) главный векторъ $\overline{R}$ на два слагаемые OA и OB, проведемъ въ плоскости AOB перпендикуляры къ OA и OB, и по нимъ разложимъ главный моментъ $\overline{K}$ на два слагаемые OA' и OB'. Эти слагаемые должны быть моментами искомыхъ силъ $\overline{\lambda}$ и $\overline{\mu}$.

Означая плечи этихъ силъ чрезъ p и q, мы будемъ имѣть

$$p=\frac{OA'}{OA} \text{ и } q=\frac{OB'}{OB}; \dots\dots\dots\dots\dots (16)$$

при этомъ оба плеча должны быть отложены на перпендикулярѣ къ плоскости AOB.

Если $OC=p$ и $OC'=q$, то прямая параллельная OA, и проходящая чрезъ C будетъ направляющая (l) для силы $\overline{\lambda}$, а прямая, параллельная OB и проходящая чрезъ C' — направляющая (m) для силы $\overline{\mu}$; слѣд: сила $\overline{\lambda}$ изобразится длиною, геометрически равною OA, отложенною на (l), а $\overline{\mu}$ — длиною геометрически равною OB на (m).

Изъ сдѣланнаго построенія легко видѣть, что

$$p = \frac{K}{R} \cot(\mu R),\ q = \frac{K}{R} \cot(\lambda R);$$

отсюда выводимъ пропорцію

$$p : q = \operatorname{tg}(\lambda R) : \operatorname{tg}(\mu R),$$

показывающую, что *кратчайшія разстоянія двухъ сопряженныхъ поляръ отъ оси комплекса* $[K, R]$, *пропорціональны тангенсамъ угловъ, составляемыхъ полярами съ осью**).

Силы $\overline{\lambda}$ и $\overline{\mu}$ въ геометрическомъ смыслѣ имѣютъ то же свойство, что двѣ сопряженныя угловыя скорости вращенія, эквивалентныя системѣ скоростей, опредѣляемыхъ винтовымъ движеніемъ съ поступательною скоростью $\overline{R}$ и угловою скоростью $\overline{K}$.

Вообще всѣ свойства, разсмотрѣнныя нами во главѣ XIV Кинематики, относящіяся къ угловымъ вращательнымъ скоростямъ, примѣняются и къ силамъ.

82. Когда главный векторъ $\overline{R}$ данной системы силъ равенъ нулю первое изъ ур. (12) приводится къ слѣдующему

$$\overline{\theta\mu} = -\overline{\theta\lambda},$$

требующему, чтобы векторы силъ $\overline{\lambda}$ и $\overline{\mu}$ и слѣд. самыя силы были геометрически равны и противоположны. Если при этомъ главный моментъ $\overline{K}$ не равенъ нулю, т. е. данная система силъ не находится въ равновѣсіи, то силы $\overline{\lambda}$ и $\overline{\mu}$ не могутъ быть направлены по одной прямой.

Двѣ силы, равныя, противоположныя и направленныя по разнымъ прямымъ, называются *парою* (couple).

Слѣд. *когда главный векторъ или геометрическая сумма системы силъ равна нулю и силы не находятся въ равновѣсіи, то онѣ приводятся къ парѣ.*

---

*) Эта теорема доказана Шалемъ для двухъ сопряженныхъ осей вращенія въ системѣ возможныхъ скоростей, опредѣляемыхъ винтовымъ движеніемъ, въ которомъ R есть поступательная скорость, а K угловая скорость вращенія.

Въ разсматриваемомъ случаѣ прямыя (l) и (m), суть сопряженныя поляры комплекса [K, O]. Означая чрезъ $\overline{\sigma}$ отрѣзокъ какого нибудь луча (A), будемъ имѣть $\overline{K\sigma\sigma} = 0$; это показываетъ, что всѣ лучи комплекса [K, O] перпендикулярны къ главному моменту $\overline{K}$. А какъ, по доказанному выше, всякая прямая, пересѣкающая (l) и (m), т. е. лежащая въ плоскости пары (λ, μ), есть лучь комплекса, то главный моментъ $\overline{K}$ долженъ быть перпендикуляренъ къ этой плоскости.

Уравненіе (37) главы III

$$\overline{K'} = \overline{K} - \overline{MR'},$$

связывающіе главные моменты $\overline{K}$ и $\overline{K'}$, соотвѣтствующіе двумъ разныхъ началамъ O и O', при $R' = 0$ даетъ $\overline{K'} = \overline{K}$; слѣд. *величина и направленіе главнаго момента $\overline{K}$ не зависитъ отъ начала*, *когда система данныхъ силъ приводится къ одной парѣ.*

Главный моментъ данныхъ силъ $\overline{K}$ есть также моментъ эквивалентной съ ними пары ($\overline{\lambda}$, $\overline{\mu}$). Если возьмемъ начало O на прямой (m), по которой направлена сила (μ), то $M\mu = 0$, и $\overline{K} = \overline{M\lambda}$. Означая чрезъ h кратчайшее разстояніе между прямыми (l) и (m), мы будемъ имѣть $K = \lambda h$.

Кратчайшее разстояніе h между прямыми, по которымъ направлены силы, составляющія пару ($\overline{\lambda}$, $\overline{\mu}$), *называется плечемъ пары*; слѣд. *моментъ пары равенъ алгебраическому произведенію одной изъ силъ на плечо.*

Всякую прямую перпендикулярную къ плоскости пары Пуансо называетъ *осью пары* *). Если взять за начало момента K средину плеча h, то наблюдатель, прислоненный къ $\overline{K}$ и смотрящій на точку приложенія той или другой изъ силъ, составляющихъ пару, видитъ дѣйствіе силы вправо; потому что тогда моментъ каждой силы равенъ $\frac{1}{2}K$ и направленъ въ одну сторону съ $\overline{K}$.

Чтобы двѣ пары ($\overline{\lambda}$, $\overline{\mu}$) и ($\overline{\lambda'}$, $\overline{\mu'}$) были эквивалентны, необходимо и достаточно, что бы ихъ моменты были геометрически равны между собою. А для этого необходимо и достаточно: 1) *чтобы плоско-*

*) Пуансо также называетъ самый моментъ $\overline{K}$ парою.

сти двухъ паръ совпадали или были параллельны, 2) *чтобы произведеніе силы на плечо въ каждой парѣ было одно и тоже и* 3) *чтобы наблюдатель, помѣщенный перпендикулярно къ плоскости одной пары, смотрящій на точки приложенія силъ той и другой пары, видѣлъ силы, дѣйствующими въ одну сторону, т. е. въ обѣихъ парахъ вправо или въ обѣихъ влѣво.*

На основаніи этихъ условій эквивалентности паръ, можно одну пару преобразовать въ другую, перенеся ее въ той же плоскости въ другое мѣсто, или въ другую плоскость, параллельную, сохраняя величину и направленіе момента пары.

Если двѣ системы силъ не уравновѣшиваются и каждая изъ нихъ приводится къ парѣ, то онѣ вмѣстѣ составляютъ одну систему, приводящуюся также къ парѣ; потому что, такъ какъ главный векторъ каждой системы равенъ нулю, то и главный векторъ сложной системы также равенъ нулю, какъ геометрическая сумма сложныхъ векторовъ каждой системы. При этомъ главный моментъ сложной системы равенъ геометрической суммѣ главныхъ моментовъ составляющихъ системъ; слѣд. моментъ пары, эквивалентной сложной системѣ, есть геометрическая сумма моментовъ двухъ паръ, эквивалентныхъ даннымъ составляющимъ системамъ.

Изъ этого между прочимъ слѣдуетъ, что двѣ пары $(\overline{\lambda}, \overline{\mu})$ и $(\overline{\lambda'}, \overline{\mu'})$ съ моментами $\overline{K}$ и $\overline{K'}$ слагаются въ одну пару съ моментомъ $\overline{K}+\overline{K'}$.

Для равновѣсія двухъ паръ $(\overline{\lambda}, \overline{\mu})$ и $(\overline{\lambda'}, \overline{\mu'})$ необходимо и достаточно, чтобы $\overline{K}+\overline{K'}=0$, или $\overline{K'}=-\overline{K}$ т. е. чтобы ихъ моменты были геометрически равны и противоположны.

83. Каждую силу $\overline{F}$ можно привести къ парѣ и къ силѣ, ей геометрически равной, приложенной къ данной точкѣ O. Для этого приложимъ къ точкѣ O силу $\overline{F_1}$ геометрически равную $\overline{F}$ и силу ей прямо противоположную $\overline{F_1}$; отъ этого вмѣсто $\overline{F}$ мы будемъ имѣть силу ей геометрически равную $\overline{F_1}$ и пару $(\overline{F}, -\overline{F_1})$. Такимъ образомъ системы данныхъ силъ $\overline{F}, \overline{F'},\ldots$ можно замѣнить системою силъ $\overline{F_1}, \overline{F_1'},\ldots$, имъ геометрически равныхъ, приложенныхъ къ точкѣ O, и системою паръ: $(\overline{F}, -\overline{F_1}), (\overline{F'}, -\overline{F_1'})\ldots$. Первая изъ составляющихъ системъ

имѣетъ равнодѣйствующую, которая есть главный векторъ $\overline{R}$ данной системы силъ, а система паръ приводится къ одной парѣ $(\overline{\lambda}, \overline{\mu})$, моментъ которой есть главный моментъ данной системы силъ $\overline{K}$.

Если $\overline{K}$ есть самый меньшій главный моментъ, то плоскость пары $\overline{Q}, -\overline{Q}$) перпендикулярна къ главному вектору $\overline{R}$.

Расположивъ пару такъ, чтобы средина ея плеча была въ началѣ O, мы будемъ имѣть силу $\overline{R}$, влекущую эту точку по направленію центральной оси комплекса $[K, R]$ и двѣ силы, стремящіяся вращать плечо пары около этой прямой.

Но изъ этого однакожъ не слѣдуетъ, что тѣло, на которое дѣйствуютъ силы $\overline{F}$, $\overline{F'}$, . . . , получаетъ винтовое движеніе; потому что движеніе тѣла происходитъ не только отъ дѣйствія силъ $\overline{F}$, $\overline{F'}$, ... но также и отъ дѣйствія внутреннихъ силъ.

Если система силъ $\overline{F}$, $\overline{F'}$, ... приводится къ парѣ, то $R = 0$, а потому инварьянтъ $\overline{RK}$ равенъ нулю; слѣд. *инварьянтъ системы силъ равенъ нулю въ одномъ изъ трехъ случаевъ*: 1) *когда силы въ равновѣсіи*, 2) *когда онѣ приводятся къ одной силѣ* и 3) *когда онѣ приводятся къ парѣ*.

Въ каждомъ изъ этимъ случаевъ по формуламъ предъидущей главы имѣемъ:

$$\Sigma FF'\left(\frac{F}{F'}\right) = 0, \ \Sigma(F, F') = 0,$$

$$XL + ZM + ZN = 0.$$

ГЛАВА VI.

Свойства силъ, неизмѣняющихся геометрически, когда ихъ точки приложенія, будучи связаны неизмѣняемо, получаютъ какое либо перемѣщеніе.

84. Мы видѣли въ § 74, что, если къ неизмѣняемой системѣ точекъ приложена система параллельныхъ силъ, геометрическая сумма которыхъ не равна нулю, то такая система силъ приводится къ одной силѣ, которую можно приложить къ центру силъ, т. е. къ центру массъ, равныхъ силамъ и сосредоточенныхъ въ точкахъ приложенія силъ; притомъ, если силы неизмѣняются геометрически, когда система точекъ приложенія получаетъ какое либо перемѣщеніе, то равнодѣйствующая также неизмѣняется геометрически и остается приложенною къ той же точкѣ. Вмѣсто того, чтобы перемѣщать точки приложенія силъ, можно оставить ихъ неподвижными, а силы вращать около этихъ точекъ такъ, чтобы всѣ силы, оставаясь между собою параллельными, сохраняли относительныя положенія и величины или измѣняли свои величины въ одномъ отношеніи; приэтомъ равнодѣйствующая будетъ вращаться около неподвижной точки, которая есть центръ системы силъ, и оставаясь параллельною всѣмъ силамъ, будетъ сохранять свою величину, или измѣняться въ томъ же отношеніи, въ какомъ измѣняется каждая сила.

Есть другія системы силъ, имѣющія подобное свойство. Простѣйшая изъ нихъ есть система двухъ пересѣкающихся силъ. Пусть будутъ: $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ двѣ силы, приложенныя къ двумъ неподвижнымъ точкамъ A

и B и направленныя по прямымъ, сходящимся въ точкѣ C. Ихъ равнодѣйствующая $\overline{R}$ также направлена по прямой, сходящейся въ точкѣ C.

Если мы повернемъ силы $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ около точекъ A и B въ плоскости ABC, неизмѣняя величинъ и угла, между ними заключающагося, то онѣ примутъ нѣкоторыя положенія $\overline{P}'$ и $\overline{Q}'$, направленныя по прямымъ, составляющимъ уголъ $AC'B$ равный углу ACB. Въ слѣдствіе равенства этихъ угловъ четыре точки A, B, C и C' находятся на одной окружности круга. Равнодѣйствующая $\overline{R} = \overline{P} + \overline{Q}$ пересѣчетъ эту окружность въ нѣкоторой точкѣ O. Чрезъ эту же точку должна проходить и равнодѣйствующая $\overline{R}'$ силъ $\overline{P}'$ и $\overline{Q}'$; потому что прямая, по которой направлена $\overline{R}'$, должна съ $\overline{P}'$ составлять уголъ равный углу OCA; слѣд при вращеніи силъ $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ около точекъ A и B ихъ равнодѣйствующая $\overline{R}$ вращается около точки O; поэтому можно назвать точку O *центромъ силъ* $\overline{P}$ и $\overline{Q}$.

Представимъ теперь себѣ, что точки A, C', B, O, будучи связаны неизмѣняемо, повернулись около O такъ, что точка C' пришла на прямую OC въ точку C''; тогда прямая $C'A$ приметъ положеніе $C''A'$, параллельное CA и $C'B$ — положеніе $C''B'$ параллельное CB; притомъ сила $\overline{P}'$ будетъ геометрически равна $\overline{P}$, а сила $\overline{Q}'$ — геометрически равна $\overline{Q}$

Легко видѣть, что

$$P:Q:R = \sin(QR):\sin(RP):\sin(PQ)$$
$$= \sin(BAO):\sin(ABO):\sin(AOB)$$
$$= OB:OA:AB;$$

откуда получимъ разстоянія центра силъ O отъ точекъ приложенія силъ:

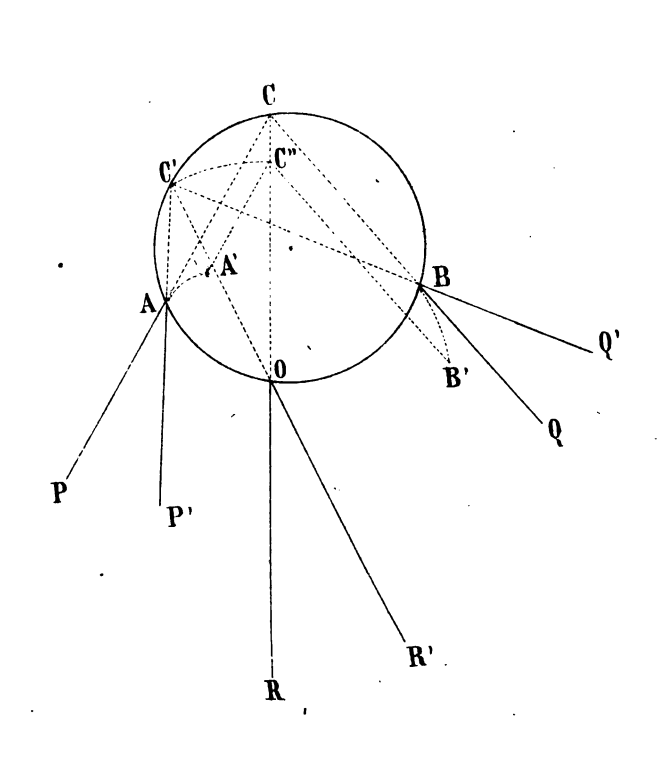
$$OA = \frac{Q.AB}{R} \text{ и } OB = \frac{P.AB}{R}, \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

помощію которыхъ можно опредѣлить положеніе точки O.

Когда силы P и Q, параллельны, точка O находится на прямой AB и разстоянія OA и OB опять опредѣляются предъидущими формулами.

Къ стр. 364.

Фиг. 36.



Означая чрезъ p, q, r разстоянія точекъ A, B, O отъ точки схода C трехъ силъ, по извѣстному свойству четыреугольника, вписаннаго въ кругъ, мы будемъ имѣть:

$$OB \cdot p + OA \cdot q = AB \cdot r;$$

отсюда, принявъ во вниманіе формулы (1), выводимъ:

$$r = \frac{Pp + Qq}{R} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

Этимъ можно опредѣлить положеніе центра O на прямой, по которой направлена равнодѣйствующая.

Всякая система силъ $\overline{F}$, $\overline{F'}$, . . ., находящихся въ одной плоскости и приводящихся къ одной равнодѣйствующей, имѣетъ центръ, въ чемъ легко удостовѣриться слѣдующимъ образомъ: разложивъ главный векторъ силъ $\overline{R}$ на два слагаемые $\overline{P}$ и $\overline{Q}$, разложимъ каждую силу на двѣ параллельныя $\overline{P}$ и $\overline{Q}$; отъ этого мы получимъ двѣ системы параллельныхъ силъ: первая имѣетъ равнодѣйствующую, геомотрически равную $\overline{P}$ и центръ въ нѣкоторой точкѣ A; вторая имѣетъ равнодѣйствующую геометрически равную $\overline{Q}$ и центръ въ нѣкоторой точкѣ B. Равнодѣйствующія $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ двухъ системъ (p) и (q), будучи приложены къ точкамъ A и B, сохраняютъ эти точки приложенія и не измѣняются геометрически, когда всѣ точки приложенія данныхъ силъ, будучи неизмѣняемо связаны, получаютъ какое либо перемѣщеніе въ плоскости силъ; слѣд. онѣ имѣютъ нѣкоторый центръ O. Можно разсматривать эту точку какъ центръ данной системы силъ, потому что равнодѣйствующая $\overline{R}$ двухъ силъ $\overline{P}$ и Q, приложенныхъ къ A и B, есть равнодѣйствующая данныхъ силъ, и она, будучи приложена къ точкѣ O, сохраняетъ эту точку приложенія при вращеніи точекъ приложенія данныхъ силъ около O, т. е. около оси, проведенной чрезъ O перпендикулярно къ плоскости силъ. Но это свойство точки O нарушается при вращеніи точекъ приложенія около другой оси.

Такъ какъ центръ O находится на прямой, по которой направлена равнодѣйствующая $\overline{R}$ данной системы силъ, то онъ имѣетъ свойство,

указанное въ § 72: *алгебраическая сумма произведеній всѣхъ силъ умноженныхъ на перпендикуляры, на нихъ опущенные изъ O, равна нулю.* Означая чрезъ ρ, ρ', ρ''... радіусы векторы, проведенные изъ O въ точки приложенія силъ $\overline{F}$, $\overline{F'}$,...., а чрезъ φ, φ',.... углы, которые они составляютъ съ соотвѣтственными силами, можно приведенное свойство выразить уравненіемъ

$$\Sigma F\rho \sin \varphi = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

Это уравненіе должно существовать при вращеніи всѣхъ точекъ приложенія въ плоскости силъ около O. Отъ такого вращенія всѣ углы φ, φ',... получаютъ одно и тоже приращеніе ω, а F, F',..., ρ, ρ',... неизмѣняются; слѣд. ур. (3) превратится въ слѣдующее:

$$\Sigma F\rho \sin (\varphi + \omega) = 0$$

или

$$\cos \omega \, \Sigma F\rho \sin \varphi + \sin \omega \, \Sigma F\rho \cos \varphi = 0.$$

Здѣсь первый членъ въ слѣдствіе ур. (3) равенъ нулю; поэтому остается

$$\sin \omega \, \Sigma F\rho \cos \varphi = 0.$$

Такъ какъ это уравненіе должно существовать при всякомъ значеніи ω, то необходимо

$$\Sigma F\rho \cos \varphi = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

Ур. (3) принадлежитъ каждой точкѣ O прямой, по которой направлена равнодѣйствующая данныхъ силъ, а потому можетъ быть принято за уравненіе этой прямой. Ур. (4) выводится изъ ур. (3) перемѣною угловъ φ, φ',... на $\varphi + 90^\circ$, $\varphi' + 90^\circ$,...; поэтому, если мы повернемъ всѣ данныя силы около ихъ точекъ приложенія, въ плоскости силъ, въ одну сторону на 90°, неизмѣняя величинъ, то получимъ систему силъ, равнодѣйствующая которыхъ будетъ направлена по прямой (4). Построивъ прямыя (3) и (4), мы получимъ въ ихъ пересѣченіи центръ данной системы силъ O.

Пусть будутъ (x, y), (x', y'),.... прямолинейныя координаты точекъ приложенія силъ $\overline{F}$, $\overline{F'}$,... относительно какихъ нибудь пря-

моугольныхъ осей Ax, Ay, взятыхъ въ плоскости этихъ силъ; (X, Y), (X', Y'),... проекціи силъ на этихъ осяхъ, а a, b координаты центра O. По ур. (3) и (4) мы будемъ имѣть:

$$\Sigma[(x-a)Y-(y-b)X]=0,\ \Sigma[(x-a)X+(y-b)Y]=0$$

или

$$a\Sigma Y - b\Sigma X = \Sigma(xY - yX)$$

$$a\Sigma X + b\Sigma Y = \Sigma(yX + yY);$$

отсюда выводимъ координаты центра

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\Sigma(xY-yX).\Sigma Y + \Sigma(xX+yY).\Sigma X}{(\Sigma X)^2+(\Sigma Y)^2} \\ b &= \frac{\Sigma(xX+yY).\Sigma Y - \Sigma(xY-yX).\Sigma X}{(\Sigma X)^2+(\Sigma Y)^2}. \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(5)$$

Здѣсь $\Sigma(xY-yX)$ есть главный моментъ данныхъ силъ относительно начала координатъ, а $\Sigma(xX+yY)$ — главный моментъ силъ, повернутыхъ на 90° около точекъ приложенія, при томъ же началѣ O.

Силы, параллельныя одной плоскости (π), съ главнымъ векторомъ $\overline{R}$, неравнымъ нулю, такъ же какъ и силы, лежащія въ одной плоскости могутъ быть замѣнены двумя системами параллельныхъ силъ (p) и (q), равнодѣйствующія которыхъ равны двумъ слагаемымъ $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ вектора $\overline{R}$, направленнымъ по разнымъ прямымъ и приложеннымъ къ двумъ точкамъ A и B, неизмѣняемо связанныхъ съ точками приложенія данныхъ силъ. Если прямая AB параллельна плоскости (π), то равнодѣйствующія силъ (p) и (q) пересѣкаются и потому приводятся къ одной силѣ, которая есть равнодѣйствующая всѣхъ данныхъ силъ. Онѣ имѣютъ центръ O, къ которому можно приложить ихъ равнодѣйствующую. При вращеніи системы точекъ приложенія всѣхъ силъ, неизмѣняемо связанныхъ, около прямой, проходящей чрезъ O и перпендикулярной къ плоскости (π), данныя силы сохраняютъ ту же равнодѣйствующую съ тою же точкою приложенія O.

Данныя силы не имѣютъ ни одной равнодѣйствующей и не имѣютъ центра O, когда прямая AB не параллельна плоскости (π).

Во всякомъ случаѣ, какъ для силъ, лежащихъ въ одной плоскости, такъ и для силъ параллельныхъ плоскости (π), прямая AB имѣетъ свойство, что при вращеніи около нея системы точекъ приложенія данныхъ силъ, эти силы остаются эквивалентны двумъ силамъ, приложеннымъ къ точкамъ A и B и неизмѣняющимся геометрически. По такому свойству, сходному съ центромъ силъ, параллельныхъ или лежащихъ въ одной плоскости, Миндингъ называетъ прямую AB *центральною осью* *).

Положеніе центральной линіи относительно системы точекъ приложенія силъ, независитъ отъ способа разложенія силъ на двѣ группы параллельныхъ силъ (p) и (q).

Легко доказать, что на прямой AB находится центръ параллельныхъ силъ, представляемыхъ проекціями данныхъ силъ на прямыхъ, проведенныхъ чрезъ точки приложенія этихъ силъ параллельно какой ни есть данной прямой (l); приэтомъ проектирующія плоскости могутъ быть ортогональныя или наклонныя, параллельныя какой ни есть плоскости. Въ самомъ дѣлѣ эти новыя силы составлены изъ двухъ группъ: проекцій (p_1) силъ (p) и проекцій (q_1) силъ (q). Такъ какъ силы (p_1) пропорціональны соотвѣтственнымъ силамъ (p), то онѣ имѣютъ центръ въ (A); по той же причинѣ силы (q_1) имѣютъ центръ въ (B); вмѣстѣ же двѣ группы (p_1) и (q_1) составляютъ одну систему силъ параллельныхъ (l), центръ которой долженъ находиться на одной прямой съ центрами составляющихъ группъ, т. е. на прямой AB.

Если возьмемъ для (l) главный векторъ $\overline{R}$, то получимъ для центра разсматриваемой системы параллельныхъ силъ точку, называемую *центральною на центральной линіи.* (Centralpunkt der Centrallinie)**).

85. Вообще всякая система силъ $\overline{F}$, $\overline{F'}$, . . . , приложенныхъ къ неизмѣняемой системѣ точекъ, въ томъ случаѣ когда ихъ главный векторъ $\overline{R}$ не равенъ нулю, можетъ быть различнымъ образомъ приведена къ тремъ силамъ такъ, что, при всякомъ перемѣщеніи системы точекъ приложенія данныхъ силъ, эти три силы неизмѣняются геоме-

---

*) Мёбіусъ называетъ эту прямую *центральною линіею.*

**) Lehrbuch der Statik. I Theil. s. 282

трически, а точки ихъ приложенія сохраняютъ свое положеніе относительно точекъ приложенія данныхъ силъ. Для этого разложимъ главный векторъ $\overline{R}$ на три слагаемыя $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$, направленныя по ребрамъ какого нибудь трехграннаго угла, и каждую изъ данныхъ силъ $\overline{F}$, $\overline{F'}$,... на три силы, параллельныя этимъ ребрамъ; отъ того образуются три системы параллельныхъ силъ: (p), (q), (s), которыя имѣютъ равнодѣйствующія, равныя геометрически: $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{S}$, и центры въ нѣнѣкорыхъ точкахъ A, B, C. Приложивъ эти равнодѣйствующія къ соотвѣтственнымъ центрамъ, мы будемъ имѣть три силы $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$, неизмѣняющіяся геометрически и сохраняющія точки приложенія A, B, C, неизмѣняемо связанныя съ точками приложенія данныхъ силъ, когда послѣднія точки получаютъ какое либо перемѣщеніе.

Когда точки A, B, C не лежатъ на одной прямой, тогда чрезъ нихъ можно провести опредѣленную плоскость, неизмѣняемо связанную съ точками приложенія силъ. Такая плоскость называется *центральною*. xx) Положеніе ея не зависитъ отъ способа разложенія главнаго вектора $\overline{R}$ на слагаемыя $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{S}$, потому что въ ней находится центръ системы параллельныхъ силъ, представленныхъ проекціями данныхъ силъ на прямыхъ, проведенныхъ чрезъ точки приложенія параллельно всякой данной прямой *). Въ самомъ дѣлѣ: такая система параллельныхъ силъ, которую означимъ черезъ (l), состоитъ изъ трехъ системъ: (p_1), (q_1), (s_1), составленныхъ изъ проекцій силъ каждой изъ трехъ системъ параллельныхъ силъ (p), (q), (s). Такъ какъ силы системы (p_1) пропорціональны силамъ системы (p), то A есть центръ силъ (p_1); по той же причинѣ B есть центръ силъ (q_1) и C — центръ силъ (s_1); слѣд. центръ системы (l), сложной изъ системъ (p_1), (q_1), (s_1) долженъ находиться въ одной плоскости съ точками A, B, C.

Если точки A, B, C лежатъ на одной прямой, то на этой прямой будетъ и центръ системы (l). Въ такомъ случаѣ прямая AB есть центральная линія. Если же три точки A, B, C совпадаютъ въ одну O, то въ этой же точкѣ будетъ и центръ системы (l).

---

*) При этомъ проектирующія плоскости могутъ быть параллельны всякой данной плоскости.

xx) Moigno, Statique pag 206 [illegible]

Выведемъ уравненіе центральной плоскости, полагая, что точки A, B, C суть центры трехъ системъ силъ:

$$(X, X', \ldots), (Y, Y', \ldots), (Z, Z', \ldots),$$

полученныхъ отъ разложенія данныхъ силъ $\bar{F}$, $\bar{F}'$,... по прямымъ, параллельнымъ координатнымъ осямъ Ox, Oy, Oz, къ которымъ отнесены точки приложенія силъ, и что даны координаты этихъ точекъ:

$$(x, y, z), (x', y', z'), \ldots$$

Равнодѣйствующія трехъ разсматриваемыхъ системъ параллельныхъ силъ выражаются суммами: ΣX, ΣY, ΣZ и изображаются прямыми, параллельными осямъ Ox, Oy, Oz.

Составивъ девять суммъ

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma xX = a_{11},\ \Sigma xY = a_{12},\ \Sigma xZ = a_{13} \\ \Sigma yX = a_{21},\ \Sigma yY = a_{22},\ \Sigma yZ = a_{23} \\ \Sigma zX = a_{31},\ \Sigma zY = a_{32},\ \Sigma zZ = a_{33} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots(6)$$

и означивъ чрезъ $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ координаты точекъ A, B, C мы, по формуламъ (5) § 74 главы V, найдемъ, что

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{a_{11}}{\Sigma X},\ \alpha_2 = \frac{a_{21}}{\Sigma X},\ \alpha_3 = \frac{a_{31}}{\Sigma X} \\ \beta_1 = \frac{a_{12}}{\Sigma Y},\ \beta_2 = \frac{a_{22}}{\Sigma Y},\ \beta_3 = \frac{a_{32}}{\Sigma Y} \\ \gamma_1 = \frac{a_{13}}{\Sigma Z},\ \gamma_2 = \frac{a_{23}}{\Sigma Z},\ \gamma_3 = \frac{a_{33}}{\Sigma Z} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots(7)$$

Послѣ того, означая чрезъ x, y, z координаты какой нибудь точки на плоскости, проходящей чрезъ точки A, B, C, мы получимъ ур. этой плоскости подъ видомъ

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, \\ x, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ y, & \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ z, & \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

или

$$\begin{vmatrix} 1, & \Sigma X, & \Sigma Y, & \Sigma Z \\ x, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ y, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ z, & a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Это уравненіе принадлежитъ опредѣленной плоскости, которая есть центральная, когда младшіе опредѣлители, полученные отъ дифференцированія первой части относительно элементовъ перваго столбца, не равны вмѣстѣ нулю.

Если же

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \Sigma X, & \Sigma Y, & \Sigma Z \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \Sigma X, & \Sigma Y, & \Sigma Z \\ a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \Sigma X, & \Sigma Y, & \Sigma Z \\ a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \end{vmatrix} = 0,$$

то три точки A, B, C находятся на одной прямой. Если приэтомъ A, B, C не совпадаютъ въ одну точку, то существуетъ центральная линія AB и уравненія ея могутъ быть представлены подъ видомъ

$$\begin{vmatrix} 1, & \Sigma Y, & \Sigma Z \\ y, & a_{22}, & a_{23} \\ z, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1, & \Sigma X, & \Sigma Z \\ x, & a_{11}, & a_{13} \\ z, & a_{31}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Система силъ будетъ имѣть центръ, когда точки A, B, C совпадаютъ въ одну C, что выражается пропорціями:

$$a_{11} : a_{12} : a_{13} = a_{21} : a_{22} : a_{23} = a_{31} : a_{32} \, a_{33} = \Sigma X : \Sigma Y : \Sigma Z.$$

Полученные выводы равно относятся къ прямоугольнымъ и косоугольнымъ осямъ Ox, Oy, Oz.

86. Миндингъ нашелъ слѣдующее замѣчательное свойство точекъ A, B, C:

Произведеніе площади треугольника ABC на объемъ параллелепипеда, построеннаго на трехъ ребрахъ, представляющихъ силы ΣX, ΣY, ΣZ, перенесенныя въ одну точку O, не зависятъ отъ положенія этой точки и направленія осей Ox, Oy, Oz.

Для доказательства этой теоремы разсмотримъ значеніе опредѣлителя

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}$$

полагая, что оси Ox, Oy, Oz прямоугольны.

Этотъ опредѣлитель по извѣстному правилу умноженія опредѣлителей можетъ быть представленъ суммою произведеній опредѣлителей 3-го порядка, составленныхъ изъ всѣхъ сочетаній по три столбца таблицы.

$$\begin{vmatrix} X, & X', & X'', \ldots \\ Y, & Y', & Y'', \ldots \\ Z, & Z', & Z'', \ldots \end{vmatrix}$$

на соотвѣтственные опредѣлители третьяго порядка, составленные такимъ же образомъ изъ столбцовъ таблицы

$$\begin{vmatrix} x, & x', & x'', \ldots \\ y, & y', & y'', \ldots \\ z, & z', & z'', \ldots \end{vmatrix},$$

что можно изобразить сокращенно такъ:

$$\sum \begin{vmatrix} X, & X', & X'' \\ Y, & Y', & Y'' \\ Z, & Z', & Z'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x, & x', & x'' \\ y, & y', & y'' \\ z, & z', & z'' \end{vmatrix}$$

Опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} X, & X', & X'' \\ Y, & Y', & Y'' \\ Z, & Z', & Z'' \end{vmatrix}$$

выражаетъ объемъ параллелепипеда, ребра котораго суть векторы vF, vF', vF'' трехъ силъ $\overline{F}$, $\overline{F}'$, $\overline{F}''$, съ + или — *), а опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} x, & x', & x'' \\ y, & y', & y'' \\ z, & z', & z'' \end{vmatrix}$$

объемъ параллелепипеда, у котораго три ребра суть радіусы векторы, проведенные изъ начала O въ точки приложенія M, M', M'' трехъ силъ $\overline{F}$, $\overline{F}'$, $\overline{F}''$, также съ + или —. Означая первый объемъ чрезъ (F, F', F'') и чрезъ δ разстояніе точки O отъ плоскости $MM'M''$, взятое съ + или —, смотря потому будетъ ли произведеніе разсматриваемыхъ опредѣлителей положительное или отрицательное, можно написать

$$A = 6\ \Sigma(F, F', F'')\cdot MM'M''\cdot\delta \ldots\ldots\ldots (10)$$

Положимъ теперь, что каждая изъ данныхъ силъ разложена на три, параллельныя ребрамъ какого нибудь трехграннаго угла. Отъ этого мы получимъ три системы параллельныхъ силъ (p), (q), (s), имѣющія равнодѣйствующія $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{S}$, приложенныя къ тремъ точкамъ A', B', C', находящимся въ центральной плоскости (9). Означая соотвѣтственно чрезъ

$$(P_1, P_2, P_3), (Q_1, Q_2, Q_3), (S_1, S_2, Z_3)$$

проекціи силъ P, Q, S на прямоугольныхъ осяхъ и чрезъ $(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3')$, $(\beta_1', \beta_2', \beta_3')$, $(\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3')$ координаты точекъ A', B', C' мы будемъ имѣть:

---

*) Знакъ опредѣлителя опредѣляется такъ: если наблюдатель vF, смотрящій на vF', имѣетъ vF'' съ правой стороны, то должно взять +, а если съ лѣвой, то —.

$$P_1+Q_1+S_1=\Sigma X,\ P_2+Q_2+S_2=\Sigma Y,\ P_3+Q_3+S_3=\Sigma Z$$

$$\alpha_1'P_1+\beta_1'Q_1+\gamma_1'S_1=a_{11},\ \alpha_1'P_2+\beta_1'Q_2+\gamma_1'S_2=a_{12},\ \alpha_1'P_3+\beta_1'Q_3+\gamma_1'S_3=a_{13}$$

$$\alpha_2'P_1+\beta_2'Q_1+\gamma_2'S_1=a_{21},\ \alpha_2'P_2+\beta_2'Q_2+\gamma_2'S_2=a_{22},\ \alpha_2'P_3+\beta_2'Q_3+\gamma_2'S_3=a_{23}$$

$$\alpha_3'P_1+\beta_3'Q_1+\gamma_3'S_1=a_{31},\ \alpha_3'P_2+\beta_3'Q_2+\gamma_3'S_2=a_{32},\ \alpha_3'P_3+\beta_3'Q_3+\gamma_3'S_3=a_{33};$$

поэтому опредѣлитель A имѣетъ одинаковое значеніе, какъ для данной системы силъ, такъ и для трехъ силъ P, Q, S, приложенныхъ къ точкамъ A', B', C'; слѣд.

$$A=(P,\ Q,\ S)\cdot A'B'C'\cdot D$$

гдѣ D есть разстояніе точки O отъ центральной плоскости (9). Сравнивая это значеніе A съ (10), получимъ

$$(P,\ Q,\ S)\cdot A'B'C'\cdot D=\Sigma(F,\ F',\ F'')\cdot MM'M''\cdot\delta.$$

Вторая часть этого уравненія не зависитъ отъ направленій реберъ параллелепипеда $(P,\ Q,\ S)$; слѣд. и первая часть отъ нихъ независитъ. А раздѣливъ ту или другую на D, мы получимъ величину $(P, Q, S)\cdot A'B'C'$, не зависящую, не только отъ направленія реберъ параллелепипеда, но и отъ положенія точки O. Въ этомъ результатѣ заключается теорема Миндинга *).

Для всякой точки O, взятой по центральной плоскости, мы будемъ имѣть $D=0$ и слѣд.

$$\Sigma(F,\ F',\ F'')\cdot MM'M''\cdot\delta=0,$$

что можно разсматривать какъ уравненіе центральной плоскости.

87. Если начало координатъ O взято на центральной плоскости и ось Ox по направленію главнаго вектора $\overline{R}$, то мы будемъ имѣть:

$$\Sigma X=R,\ \Sigma Y=0,\ \Sigma Z=0,$$

$$a_{11}=0,\ a_{21}=0,\ a_{31}=0,$$

и уравненіе центральной плоскости приведется къ слѣдующему:

---

*) Самъ Миндингъ доказываетъ ее другимъ образомъ. (Journal von A. Crelle, B. 15).

$$\begin{vmatrix} x, & a_{12}, & a_{13} \\ y, & a_{22}, & a_{23} \\ z, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ центры двухъ системъ параллельныхъ силъ: $(Y, Y' \ldots)$ и $(Z, Z', \ldots)$ безконечно-удалены отъ O; поэтому центральная плоскость должна быть параллельна плечамъ двухъ паръ, къ которымъ приводятся эти двѣ системы силъ.

Но можно эти двѣ системы силъ замѣнить двумя другими системами силъ, параллельныхъ осямъ Oy и Oz, имѣющими центры въ центральной плоскости на конечномъ разстояніи отъ центральной точки O.

Для этого приложимъ къ точкѣ O по оси Oy двѣ прямо противоположныя силы $\overline{R'}$ и $-\overline{R'}$ и по оси Oz двѣ прямо противоположныя силы $\overline{R''}$ и $-\overline{R''}$. Такое прибавленіе новыхъ силъ къ цѣлой системѣ данныхъ силъ, очевидно неизмѣняетъ ея дѣйствіе, при всякомъ положеніи системы точекъ приложенія, и даетъ возможность привести всю систему силъ къ тремъ силамъ, приложеннымъ къ точкамъ, неизмѣняемо связаннымъ съ точками приложенія всѣхъ данныхъ силъ, а именно: 1) къ силѣ $\overline{R} - \overline{R'} - \overline{R''}$, приложенной къ точкѣ O, 2) къ равнодѣйствующей параллельныхъ силъ: $Y, Y', \ldots \overline{R'}$, приложенной къ центру этихъ силъ, и 3) къ равнодѣйствующей параллельныхъ силъ: $Z, Z', \ldots \overline{R''}$, приложенной къ ихъ центру; приэтомъ вторая сила по величинѣ равна силѣ R', потому что $\Sigma Y = 0$, а третья равна R'', потому что $\Sigma Z = 0$.

Точки приложенія A и B этихъ двухъ силъ, т. е. центры двухъ системъ разсматриваемыхъ параллельныхъ силъ, какъ легко видѣть, находятся въ центральной плоскости.

Въ самомъ дѣлѣ, координаты точки A суть:

$$\alpha_1 = \frac{a_{12}}{R'}, \ \alpha_2 = \frac{a_{22}}{R'}, \ \alpha_3 = \frac{a_{32}}{R'},$$

а координаты B:

$$\beta_1 = \frac{a_{13}}{R''}, \ \beta_2 = \frac{a_{23}}{R''}, \ \beta_3 = \frac{a_{33}}{R''};$$

какъ тѣ, такъ и другія удовлетворяютъ уравненію центральной плоскости (11).

Слѣд. положеніе центральной плоскости можетъ быть опредѣлено помощію трехъ точекъ: O, A, B.

Миндингъ показалъ, что можно взять направленія осей Oy и Oz такъ, что прямыя OA и OB будутъ взаимно-перпендикулярны.

Для доказательства этого предложенія, положимъ, что оси Ox, Oy, Oz прямоугольныя и что онѣ перемѣняются на другія такія же Ox, Oy_1, Oz_1; причемъ $< y_1 O y = \alpha$. Пусть будутъ A_1 и B_1 положенія точекъ A и B, соотвѣтствующія осямъ Oy_1 и Oz_1, — т. е. A_1 центръ силъ

$$Y \cos\alpha + Z \sin\alpha,\quad Y' \cos\alpha + Z' \sin\alpha, \ldots$$

параллельныхъ оси Oy_1, а B_1 центръ силъ

$$-Y \sin\alpha + Z \cos\alpha,\quad -Y' \sin\alpha + Z' \cos\alpha, \ldots$$

параллельныхъ оси Oz_1. По общимъ формуламъ для координатъ центра параллельныхъ силъ, мы найдемъ, что координаты точки A относительно осей Ox, Oy, Oz суть:

$$\alpha_1' = \frac{a_{12}'}{R'},\quad \alpha_2' = \frac{a_{22}'}{R'},\quad \alpha_3' = \frac{a'_{32}}{R'},$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} a_{12}' &= a_{12} \cos\alpha + a_{13} \sin\alpha \\ a_{22}' &= a_{22} \cos\alpha + a_{23} \sin\alpha \\ a_{32}' &= a_{32} \cos\alpha + a_{33} \sin\alpha \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

а координаты точки B,

$$\beta_1' = \frac{a_{13}'}{R''},\quad \beta_2' = \frac{a_{23}'}{R''},\quad \beta_3' = \frac{a_{33}'}{R''},$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} a_{13}' &= -a_{12} \sin\alpha + a_{13} \cos\alpha \\ a_{23}' &= -a_{22} \sin\alpha + a_{23} \cos\alpha \\ a_{33}' &= -a_{32} \sin\alpha + a_{33} \cos\alpha \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Условіе, что уголъ A_1OB_1 долженъ быть прямой, выражается уравненіемъ

$$a_{12}'a_{13}'+a_{22}'a_{23}'+a_{32}'a_{33}'=0,$$

которое, вслѣдствіе формулъ (12) и (13), приводится къ слѣдующему:

$$(a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33})\cos 2\alpha-\tfrac{1}{2}(a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2-a_{13}^2-a_{23}^2-a_{32}^2)\sin 2\alpha=0,$$

которое даетъ для tg 2α всегда возможное значеніе, опредѣляющее два значенія для α, разность которыхъ равна $90°$, поэтому въ плоскости, перпендикулярной къ главному вектору R и проведенной чрезъ центральную точку O, всегда есть двѣ прямыя, и только двѣ, такого свойства, что, если по нимъ будутъ направлены оси Oy_1 и Oz_1, то уголъ A_1OB_1 будетъ прямой. Замѣтимъ, что направленіе этихъ прямыхъ не зависитъ отъ величинъ силъ R' и R''.

Плоскости, проведенныя чрезъ эти прямыя и главный векторъ R, названы Миндингомъ *средними плоскостями* (Mittelebenen).

Полагая $R'=1$ и $R''=1$, мы будемъ имѣть:

$$\alpha_1=a_{12},\ \alpha_2=a_{22},\ \alpha_3=a_{32}$$

$$\beta_1=a_{13},\ \beta_2=a_{23},\ \beta_3=a_{33},$$

$$\alpha_1'=a_{12}',\ \alpha_2'=a_{22}',\ \alpha_3'=a_{32}'$$

$$\beta_1'=a_{13}',\ \beta_2'=a_{23}',\ \beta_3'=a_{33}'.$$

Выведя величины sin α и cos α изъ ур. (12), мы получимъ уравненіе

$$(a_{32}a_{22}'-a_{22}a_{32}')^2+(a_{33}a_{22}'-a_{23}a_{32}')^2=(a_{32}a_{22}-a_{23}a_{33})^2,$$

показывающее, что координаты точки A_1 удовлетворяютъ уравненію эллиптическаго цилиндра

$$(a_{32}y-a_{22}z)^2+(a_{33}y-a_{23}z)^2=(a_{33}a_{22}-a_{23}a_{33})^2;\ \ldots(14)$$

слѣд. точка A_1 находится на эллипсѣ, по которому этотъ цилиндръ пересѣкается съ центральною плоскостью (11). Этому же ур. удовлетворяютъ и координаты точекъ A, B, B_1; слѣд. всѣ четыре точки

A, B, A_1, B_1 находятся на одномъ эллипсѣ, имѣющемъ центръ въ точкѣ O; притомъ легко видѣть, что прямыя OA и OB суть сопряженные діаметры этого эллипса, а OA_1 и OB_1 — его главные діаметры.

88. Чтобы изслѣдовать другія свойства силъ, неизмѣняющихся геометрически и приложенныхъ къ неизмѣняемой системѣ точекъ, рѣшимъ слѣдующіе два главные вопроса:

1) Опредѣлить главный моментъ силъ послѣ какого либо перемѣщенія системы точекъ приложенія, которую, для простоты выраженія, будемъ называть просто — тѣломъ.

2) Найти для тѣла такое перемѣщеніе, послѣ котораго главный моментръ удовлетворялъ бы даннымъ условіямъ.

Здѣсь нѣтъ рѣчи о главномъ векторѣ $\overline{R}$, потому что онъ неизмѣняется геометрически при всякомъ перемѣщеніи тѣла. Также неизмѣнится геометрически и главный моментъ $\overline{K}$, соотвѣтствующій какому либо началу O, когда тѣло получаетъ поступательное перемѣщеніе и начало O остается съ нимъ неизмѣняемо связаннымъ; поэтому главный моментъ $\overline{K}$ можетъ только измѣниться отъ перемѣщенія вращательнаго или перемѣщенія сложнаго изъ поступательнаго и вращательнаго. Но такъ какъ поступательное перемѣщеніе не измѣняетъ $\overline{K}$, то достаточно разсматривать вращательныя перемѣщенія около начала моментовъ O.

89. Пусть будутъ (x, y, z), (x', y', z'), ... координаты точекъ приложенія силъ относительно прямоугольныхъ осей Ox, Oy, Oz, (X, Y, Z), (X', Y', Z'),... проекціи силъ $\overline{F}$, $\overline{F'}$,... и L, M, N — проекціи главнаго момента $\overline{K}$ на этихъ осяхъ.

По формуламъ § 65 мы будемъ имѣть

$$L = \Sigma(yZ - zY),\ M = \Sigma(zX - xZ),\ N = \Sigma(xY - yX) \ldots (15)$$

Опредѣлимъ приращенія этихъ величинъ, происходящія отъ какого либо вращательнаго конечнаго перемѣщенія тѣла около точки O.

Всякое такое перемѣщеніе, какъ было доказано въ § 168 и 170 Кинематики, можетъ быть произведено вращеніемъ тѣла около нѣко-

торой оси OA на нѣкоторый уголъ φ. Положеніе этой оси и величина угловаго перемѣщенія φ опредѣляются помощію трехъ величинъ λ, μ, ν, представляющихъ проекціи на осяхъ Ox, Oy, Oz длины $OA = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \Omega$, отложенной извѣстнымъ образомъ на оси перемѣщенія.

Полагая, что оси Ox, Oy, Oz остаются неподвижны въ пространствѣ, а координаты x, y, z получаютъ послѣ перемѣщенія тѣла приращенія Δx, Δy, Δz, можно выразить эти приращенія въ функціи координаты x, y, z помощію формулъ (8) § 171 Кинематики, а именно:

$$\left.\begin{aligned}\Delta x &= \frac{2}{h}[-(\mu^2+\nu^2)x+(\lambda\mu-\nu)y+(\lambda\nu+\mu)z]\\ \Delta y &= \frac{2}{h}[(\lambda\mu+\nu)x-(\lambda^2+\nu^2)y+(\mu\nu-\lambda)z]\\ \Delta z &= \frac{2}{h}[(\lambda\nu-\mu)x+(\mu\nu+\lambda)y-(\lambda^2+\mu^2)z]\end{aligned}\right\}\ldots(16)$$

гдѣ

$$h = \begin{vmatrix} 1, & \nu, \mu \\ -\nu, & 1, \lambda \\ -\mu, & -\lambda, 1 \end{vmatrix} = 1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = 1+\Omega^2 = \sec\frac{^2\varphi}{2}.$$

Величины L, M, N получатъ приращенія:

$$\Delta L = \Sigma Z\Delta y - \Sigma Y\Delta z$$
$$\Delta M = \Sigma X\Delta z - \Sigma Z\Delta x$$
$$\Delta N = \Sigma Y\Delta x - \Sigma X\Delta y,$$

которыя помощію формулъ (16) выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned}\Delta L = \frac{2}{h}[&(\lambda\mu+\nu)\Sigma xZ-(\lambda^2+\nu^2)\Sigma yZ+(\mu\nu-\lambda)\Sigma zZ\\ &-(\lambda\nu-\mu)\Sigma xY-(\mu\nu+\lambda)\Sigma yY+(\lambda^2+\mu^2)\Sigma zY]\\ \Delta M = \frac{2}{h}[&(\mu\nu+\lambda)\Sigma yX-(\mu^2+\lambda^2)\Sigma zX+(\nu\lambda-\mu)\Sigma xX\\ &-(\mu\lambda-\nu)\Sigma yZ-(\nu\lambda+\mu)\Sigma zZ+(\mu^2+\nu^2)\Sigma xZ]\\ \Delta N = \frac{2}{h}[&(\nu\lambda+\mu)\Sigma zY-(\nu^2+\mu^2)\Sigma xY+(\lambda\mu-\nu)\Sigma yY\\ &-(\nu\mu-\lambda)\Sigma zX-(\lambda\mu+\nu)\Sigma xX+(\nu^2+\lambda^2)\Sigma yX]\end{aligned}\right\}\ldots(17)$$

Принявъ обозначенія (6) и положивъ для сокращенія

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=a\,^{*})$$

мы будемъ имѣть

$$L=a_{23}-a_{32},\ M=a_{31}-a_{13},\ N=a_{12}-a_{21}$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta L=\frac{2}{h}[&-L(\lambda^2+\mu^2)+a_{23}(\mu^2-\nu^2)+a_{13}(\lambda\mu+\nu)\\&-a_{12}(\lambda\nu-\mu)+(a_{33}-a_{22})\mu\nu+(a_{11}-a)\lambda]\\\Delta M=\frac{2}{h}[&-M(\mu^2+\nu^2)+a_{31}(\nu^2-\lambda^2)+a_{21}(\mu\nu+\lambda)\\&-a_{23}(\mu\lambda-\nu)+(a_{11}-a_{33})\nu\lambda+(a_{22}-a)\mu]\\\Delta N=\frac{2}{h}[&-N(\nu^2+\lambda^2)+a_{12}(\lambda^2-\mu^2)+a_{32}(\nu\lambda+\mu)\\&-a_{31}(\nu\mu-\lambda)+(a_{22}-a_{11})\lambda\mu+(a_{33}-a)\nu].\end{aligned}\right\}\ldots(18)$$

Положивъ еще для сокращенія

$$\left.\begin{aligned}a_{11}\lambda+a_{12}\mu+a_{13}\nu&=\alpha\\a_{21}\lambda+a_{22}\mu+a_{23}\nu&=\beta\\a_{31}\lambda+a_{32}\mu+a_{33}\nu&=\gamma\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

$$L\lambda+M\mu+N\nu=\delta\ldots\ldots\ldots\ldots(20)$$

легко привести ур. (17) къ виду

$$\left.\begin{aligned}\frac{h}{2}\Delta L&=\alpha+\mu\gamma-\nu\beta-\lambda(\delta+a)\\\frac{h}{2}\Delta M&=\beta+\nu\alpha-\lambda\gamma-\mu(\delta+a)\\\frac{h}{2}\Delta N&=\gamma+\lambda\beta-\mu\alpha-\nu(\delta+a)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(21)$$

Эти уравненія послужатъ намъ основаніемъ для рѣшенія вышеприведенныхъ вопросовъ.

90. Рѣшимъ первый вопросъ *опредѣлить главный моментъ силъ послѣ перемѣщенія тѣла.*

---

*) Должно замѣтить, что $a=\Sigma(Xx+Yy+Zz)$ есть потенціалъ разсматриваемыхъ силъ; причемъ $X, Y, Z, X'\ldots$ разсматриваются какъ постоянныя величины.

Зная первоначальное положеніе тѣла и силъ можно вычислить величины (6); потомъ, зная перемѣщеніе тѣла, мы будемъ имѣть величины λ, μ, ν, h; послѣ того, помощію формулъ (19) и (20), мы найдемъ вспомогательныя величины α, β, γ, δ, и наконецъ изъ урав. (21) выведемъ величины ΔL, ΔM, ΔN, которыя послужатъ для опредѣленія проекцій

$$L + \Delta L,\ M + \Delta M,\ N + \Delta N$$

новаго главнаго момента

$$\overline{K'} = \overline{K} + \overline{\Delta K}$$

на осяхъ координатъ.

Вспомогательныя величины α, β, γ, δ имѣютъ замѣчательное геометрическое значеніе, которымъ можно воспользоваться для построенія новаго главнаго момента $\overline{K'}$.

Такъ какъ $\frac{\lambda}{\Omega}$, $\frac{\mu}{\Omega}$, $\frac{\nu}{\Omega}$ суть косинусы угловъ, составляемыхъ осью перемѣщенія OA съ осями координатъ, то

$$\frac{1}{\Omega}(\lambda X + \mu Y + \nu Z)$$

есть проекція на этой оси силы $\overline{F}$; поэтому, если каждая изъ данныхъ силъ будетъ разложена на силу параллельную оси OA и на силу къ ней перпендикулярную, то

$$\frac{\alpha}{\Omega},\ \frac{\beta}{\Omega},\ \frac{\gamma}{\Omega} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

суть моменты относительно плоскостей yOz, zOx, xOy системы параллельныхъ силъ, составленной изъ первыхъ слагаемыхъ.

Когда сумма

$$\frac{1}{\Omega}\Sigma(\lambda X + \mu Y + \nu Z) = R \cos (R\Omega)$$

не равна нулю, тогда эта система силъ имѣетъ центръ, и, означая его координаты чрезъ α', β', γ', мы будемъ имѣть:

$$\alpha = \alpha' R \cos (R\Omega)$$

$$\beta = \beta' R \cos (R\Omega)$$

$$\gamma = \gamma' R \cos (R\Omega)$$

Въ случаѣ $R \cos(R\Omega) = 0$ разсматриваемая система силъ, параллельныхъ прямой Ω, приводится или къ одной парѣ или уравновѣшивается, тогда она не имѣетъ центра.

Въ томъ и другомъ случаѣ можно разсматривать величины (22) какъ проекціи на осяхъ координатъ нѣкоторой длины $\overline{k}$, поэтому

$$\alpha = \Omega k \cos(kx),\ \beta = \Omega k \cos(ky),\ \gamma = \Omega k \cos(kz) \ldots (23)$$

суть проекціи на осяхъ Ox, Oy, Oz длины $k \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, отложенной по направленію $\overline{k}$.

Если въ случаѣ существованія центра $(\alpha', \beta', \gamma')$ силъ параллельныхъ оси $\overline{\Omega}$, мы означимъ чрезъ ρ радіусъ векторъ, проведенный въ эту точку изъ начала O, то будемъ имѣть

$$\Omega k = \rho R \cos(R\Omega);$$

притомъ $\overline{k}$ и $\overline{\rho}$ направлены по одной прямой въ одну сторону, когда $R \cos(R\Omega) > 0$ и противоположно когда $R \cos(R\Omega) < 0$.

Опредѣлители

$$\frac{1}{\Omega}(\mu\gamma - \nu\beta),\ \frac{1}{\Omega}(\nu\alpha - \lambda\gamma),\ \frac{1}{\Omega}(\lambda\beta - \mu\alpha)$$

представляютъ проекціи на осяхъ координатъ Ox, Oy, Oz главнаго линейнаго момента разсматриваемой системы параллельныхъ силъ; слѣд. если означимъ этотъ моментъ, чрезъ $\overline{l}$, то будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \mu\beta - \nu\beta &= \Omega l \cos(lx) \\ \nu\alpha - \lambda\gamma &= \Omega l \cos(ly) \\ \lambda\beta - \mu\alpha &= \Omega l \cos(lz) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Формула (20), которую можно представить подъ видомъ

$$\delta = \Omega K \cos(K\Omega)$$

показываетъ, что $\frac{\delta}{\Omega}$ есть проекція первоначальнаго главнаго момента $\overline{K}$ на оси перемѣщенія $\overline{\Omega}$. Помноживъ эту проекцію на $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, мы получимъ величину δ.

Означая чрезъ $\overline{m}$ длину равную $\delta + a$, отложенную на оси OA въ сторону противоположную той, куда направлено $\overline{\Omega}$, будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} -\lambda(\delta+a) &= \Omega m \cos(mx) \\ -\mu(\delta+a) &= \Omega m \cos(my) \\ -\nu(\delta+a) &= \Omega m \cos(mz) \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (25)$$

Наконецъ изъ уравненій (23), (24), (25) и (21) выводимъ

$$\Delta L = \sin\frac{\varphi}{2}[k\cos(kx) + l\cos(lx) + m\cos(mx)]$$

$$\Delta M = \sin\frac{\varphi}{2}[k\cos(ky) + l\cos(ly) + m\cos(my)]$$

$$\Delta N = \sin\frac{\varphi}{2}[k\cos(kz) + l\cos(lz) + m\cos(mz)].$$

Эти формулы показываютъ, что ΔL, ΔM, ΔN суть проекціи на осяхъ координатъ длины, которая равна геометрической суммѣ $\overline{k} + \overline{l} + \overline{m}$, умноженной на $\sin\frac{\varphi}{2}$, безъ перемѣны направленія. Слѣд. для построенія геометрической разности $\overline{K'} - \overline{K}$, надобно помощію данныхъ величинъ $a_{r,s}$ и λ, μ, ν найти длины $\overline{k}$, $\overline{l}$, $\overline{m}$ и геометрическую ихъ сумму $\overline{k} + \overline{l} + \overline{m}$; потомъ, неизмѣняя направленія, уменьшить эту сумму въ отношеніи $\sin\frac{\varphi}{2} : 1$. Приложивъ геометрически къ полученной такимъ образомъ длинѣ $\overline{K'} - \overline{K}$ первоначальный главный моментъ $\overline{K}$, мы получимъ новый главный моментъ $\overline{K'}$.

91. Рѣшимъ теперь вопросъ обратный:

Опредѣлить такое перемѣщеніе, послѣ котораго главный моментъ силъ становится геометрически равнымъ данной длинѣ $\overline{K'}$.

По извѣстнымъ длинамъ $\overline{K}$ и $\overline{K'}$ опредѣлимъ проекціи ихъ разности $\overline{K'} - \overline{K}$ на осяхъ координатъ, т. е. ΔL, ΔM, ΔN; послѣ того остается рѣшить уравненія (20) и (21) относительно неизвѣстныхъ λ, μ, ν, служащихъ къ опредѣленію оси перемѣщенія OA и угловаго перемѣщенія φ.

Можно разсматривать неизвѣстныя λ, μ, ν какъ координаты относительно осей Ox, Oy, Oz конца A длины $\Omega \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, отложенной на оси

OA. Такъ какъ эти неизвѣстныя должны удовлетворять тремъ уравненіямъ второй степени (21), то *A* есть одна изъ точекъ, общихъ тремъ поверхностямъ 2-го порядка, которымъ принадлежатъ эти уравненія; слѣд. предложенный вопросъ имѣетъ столько рѣшеній, сколько эти поверхности имѣютъ общихъ вещественныхъ точекъ.

Поверхности (21) могутъ быть замѣнены тремя другими, простѣйшими, которыя съ ними имѣютъ тѣ же общія точки *A*. Уравненія этихъ новыхъ поверхностей можно получить слѣдующимъ образомъ:

Исключивъ изъ ур. (21) величины β и γ, получимъ

$$\alpha-\lambda(\delta+a)-\tfrac{1}{2}[(1+\lambda^2)\Delta L+(\lambda\mu+\nu)\Delta M+(\lambda\nu-\mu)\,\Delta N]=0$$

и положивъ

$$\delta+a+\tfrac{1}{2}(\lambda\Delta L+\mu\Delta M+\nu\Delta N)=s\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.(26)$$

будемъ имѣть

$$\alpha-\lambda s-\tfrac{1}{2}(\Delta L+\nu\Delta M-\mu\Delta N)=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.(27)$$

Также найдемъ уравненія:

$$\beta-\mu s-\tfrac{1}{2}(\Delta M+\lambda\Delta N-\nu\Delta L)=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.(28)$$

$$\gamma-\nu s-\tfrac{1}{2}(\Delta N+\mu\Delta L-\lambda\Delta M)=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.(29)$$

Вспомогательная величина s, находящаяся въ этихъ уравненіяхъ, можетъ быть, помощію формулы (20), представлена подъ видомъ

$$s=a+(L+\tfrac{1}{2}\Delta L)\lambda+(M+\tfrac{1}{2}\Delta M)\mu+(N+\tfrac{1}{2}\Delta N)\nu\,.\,.\,.(30)$$

Это выраженіе также какъ и α, β, γ есть линейное относительно неизвѣстныхъ λ, μ, ν; поэтому (27), (28) и (29) суть уравненія 2-й степени относительно этихъ неизвѣстныхъ; слѣд. онѣ принадлежатъ тремъ поверхностямъ 2-го порядка, которыя, какъ легко видѣть, суть линейчатые параболоиды, произведенные движеніемъ трехъ прямыхъ, которыя остаются параллельными одной плоскости, перпендикулярной къ прямой, проведенной изъ *O* въ средину прямой, соединяющей концы моментовъ $\overline{K}$ и $\overline{K'}$.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (30) при постоянномъ s принадлежитъ плоскости, перпендикулярной къ этой прямой, а ур. (27) другой плоскости; слѣд. оба уравненія вмѣстѣ принадлежатъ прямой, каторая, съ измѣненіемъ s, измѣняя положеніе, остается параллельною плоскости .

$$(L+\tfrac{1}{2}\Delta L)\lambda+(M+\tfrac{1}{2}\Delta M)\mu+(N+\tfrac{1}{2}\Delta N)\nu=0\ldots(31)$$

слѣд. описываетъ косую линейчатую поверхность, которая имѣетъ уравненіе 2-й степени, полученное отъ исключенія s изъ ур. (27) и (30). — Тоже заключеніе относится и къ ур. (28) и (29).

Подставивъ въ ур. (27), (28), и (29) вмѣсто α, β, γ ихъ выраженія (19), мы получимъ уравненія:

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-s)\lambda+(a_{12}+\tfrac{1}{2}\Delta N)\mu+(a_{13}-\tfrac{1}{2}\Delta M)\nu&=\tfrac{1}{2}\Delta L\\(a_{21}-\tfrac{1}{2}\Delta N)\lambda+(a_{22}-s)\mu+(a_{23}+\tfrac{1}{2}\Delta L)\nu&=\tfrac{1}{2}\Delta M\\(a_{31}+\tfrac{1}{2}\Delta M)\lambda+(a_{32}-\tfrac{1}{2}\Delta L)\mu+(a_{33}-s)\nu&=\tfrac{1}{2}\Delta N\end{aligned}\right\}\ldots(32)$$

Остается рѣшить уравненія (30) и (32) относительно s, λ, μ, ν.

Для большей симметріи въ формулахъ и для избѣжанія неопредѣленныхъ выраженій вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, введемъ вмѣсто координатъ λ, μ, ν однородныя: u_1, u_2, u_3, u_4, положивъ

$$\lambda=\frac{u_1}{u_4},\ \mu=\frac{u_2}{u_4},\ \nu=\frac{u_3}{u_4};$$

отъ этого уравненія (30) и (32) приведутся къ слѣдующимъ:

$$\left.\begin{aligned}(L+\tfrac{1}{2}\Delta L)u_1+(M+\tfrac{1}{2}\Delta M)u_2+(N+\tfrac{1}{2}\Delta N)u_3+(a-s)u_4&=0\\(a_{11}-s)u_1+(a_{12}+\tfrac{1}{2}\Delta N)u_2+(a_{13}-\tfrac{1}{2}\Delta M)u_3-\tfrac{1}{2}\Delta L\cdot u_4&=0\\(a_{21}-\tfrac{1}{2}\Delta N)u_1+(a_{22}-s)u_2+(a_{23}+\tfrac{1}{2}\Delta L)u_3-\tfrac{1}{2}\Delta M\cdot u_4&=0\\(a_{31}+\tfrac{1}{2}\Delta M)u_1+(a_{32}-\tfrac{1}{2}\Delta L)u_2+(a_{33}-s)u_3-\tfrac{1}{2}\Delta N\cdot u_4&=0\end{aligned}\right\}\ldots(33)$$

Исключивъ отсюда u_1, u_2, u_3, u_4, мы получимъ уравненіе съ одною неизвѣстною s,

$$S=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(34)$$

гдѣ

$$S=\begin{vmatrix} L+\frac{1}{2}\Delta L, & M+\frac{1}{2}\Delta M, & N+\frac{1}{2}\Delta N, & a-s \\ a_{11}-s, & a_{12}+\frac{1}{2}\Delta N, & a_{13}-\frac{1}{2}\Delta M, & -\frac{1}{2}\Delta L \\ a_{21}-\frac{1}{2}\Delta N, & a_{22}-s, & a_{23}+\frac{1}{2}\Delta L, & -\frac{1}{2}\Delta M \\ a_{31}+\frac{1}{2}\Delta M, & a_{32}-\frac{1}{2}\Delta L, & a_{33}-s, & -\frac{1}{2}\Delta N \end{vmatrix}$$

Это уравненіе, будучи 4-й степени относительно s, можетъ дать для этой неизвѣстной не болѣе четырехъ вещественныхъ значеній. Найдя эти значенія и подставивъ одно изъ нихъ въ уравненіе (32), мы будемъ имѣть три линейныя однородныя уравненія относительно u_1, u_2, u_3, u_4. Всякая система значеній этихъ неизвѣстныхъ даетъ величины:

$$\lambda=\frac{u_1}{u_4},\ \mu=\frac{u_2}{u_4},\ \nu=\frac{u_3}{u_4},\ \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2},$$

служащія для опредѣленія искомаго перемѣщенія. Означая вообще чрезъ S_{ki} младшій опредѣлитель относительно S, происходящій отъ дифференцированія S по элементу, находящемуся въ строкѣ мѣста k и въ столбцѣ мѣста i, мы будемъ имѣть

$$u_1:u_2:u_3:u_4=S_{k1}:S_{k2}:S_{k3}:S_{k4}$$

и, если не всѣ опредѣлители S_{ki} равны нулю, то получимъ опредѣленныя значенія

$$\lambda=\frac{S_{k1}}{S_{k4}},\ \mu=\frac{S_{k2}}{S_{k4}},\ \nu=\frac{S_{k3}}{S_{k4}},$$

помощію которыхъ опредѣлится положеніе точки A, а слѣд. положеніе оси OA и угловое перемѣщеніе φ.

Для вещественной величины S, выведенной изъ ур. $S=0$, уравненія (33) принадлежатъ четыремъ плоскостямъ, имѣющимъ общую точку (u_1, u_2, u_3, u_4). Если случится, что $S_{k1}=0$, $S_{k2}=0$, $S_{k3}=0$, $S_{k4}=0$, то эти плоскости пересѣкаются по одной прямой или совпадаютъ въ одну плоскость.

Въ первомъ изъ этихъ двухъ случаевъ существуетъ безчисленное множество осей OA, которыя лежатъ въ одной плоскости, проходящей чрезъ O и пересѣченіе плоскостей (33), и каждой оси отвѣчаетъ

опредѣленное угловое перемѣщеніе φ, опредѣляемое по радіусу вектору $OA = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, проведенному изъ O въ точку пересѣченія соотвѣтственной оси съ пересѣченіемъ плоскостей (33).

Когда всѣ четыре плоскости (33) проходятъ чрезъ начало O и пересѣкаются по одной прямой тогда эта прямая есть ось перемѣщенія, а угловое перемѣщеніе будетъ произвольно; потому всякая длина OA, на ней отложенная можетъ быть взята за $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. Когда плоскости (33) совпадаютъ въ одну (P), непроходящую чрезъ начало O, тогда всякая прямая, проведенная чрезъ начало O, можетъ быть взята за ось перемѣщенія, а угловое перемѣщеніе опредѣлится точкою пересѣченія этой прямой съ плоскостью (P). Если же плоскость (P) проходитъ чрезъ O, то всякая прямая, проведенная въ этой плоскости чрезъ O, можетъ быть взята за ось перемѣщенія при всякомъ угловомъ перемѣщеніи. Разсмотримъ наиболѣе замѣчательные частные случаи.

92. Пусть $\Delta L = 0$, $\Delta M = 0$, $\Delta N = 0$. Это значитъ, что требуется найти перемѣщеніе, неизмѣняющее главнаго момента $\overline{K}$. Такъ какъ главный векторъ $\overline{R}$ также отъ этого не измѣнится, то послѣ перемѣщенія, силы должны представлять систему эквивалентную первоначальной системѣ силъ; поэтому можно назвать ось искомаго перемѣщенія — *осью эквивалентности.*

Въ разсматриваемомъ случаѣ ур. (33) и (34) приводятся къ слѣдующимъ:

$$Lu_1 + Mu_2 + Nu_3 + (a - s)u_4 = 0 \ldots\ldots (35)$$

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - s)u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 &= 0 \\ a_{21}u_1 + (a_{22} - s)u_2 + a_{23}u_3 &= 0 \\ a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + (a_{33} - s)u_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (36)$$

$$(a - s)S_{14} = 0 \ldots\ldots (37)$$

гдѣ

$$S_{14} = \begin{vmatrix} a_{11} - s, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22} - s, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - s \end{vmatrix} \ldots\ldots (38)$$

Уравненіе (37) будетъ удовлетворено если положимъ $s = a$, что даетъ $\delta = 0$ и

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - a)u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 = 0 \\ a_{21}u_1 + (a_{22} - a)u_2 + a_{23}u_3 = 0 \\ a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + (a_{33} - a)u_3 = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (39)$$

Чтобы эти уравненія могли быть удовлетворены величинами u_1, u_2, u_3, которыя вмѣстѣ не равны нулю, надобно, чтобы опредѣлитель

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} - a, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22} - a, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - a \end{vmatrix}$$

былъ равенъ нулю, т. е. чтобы $s = a$ былъ корнемъ ур. $S_{14} = 0$; поэтому рѣшеніе разсматриваемаго вопроса зависитъ только отъ корней этого уравненія. А такъ какъ это уравненіе, будучи третьей степени, имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ вещественный корень, то рѣшеніе вопроса всегда возможно.

Подставивъ вмѣсто s въ ур. (36) одинъ изъ вещественныхъ корней ур. $S_{14} = 0$, мы будемъ имѣть уравненія трехъ плоскостей, проходящихъ чрезъ начало O и пересѣкающихся по одной прямой, или совпадающихъ въ одну плоскость (P). Въ первомъ случаѣ пересѣченіе плоскостей есть искомая ось эквивалентности. Если s не равна a, то плоскость (35) не проходитъ чрезъ начало O, и разсматриваемая ось встрѣчаетъ ее въ нѣкоторой точкѣ A. По радіусу вектору этой точки $OA = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ мы опредѣлимъ угловое перемѣщеніе φ. Совпаденіе плоскостей (35) въ одну (P) случится, когда младшіе опредѣлители втораго порядка, происходящіе отъ дифференцированія опредѣлителя S_{14} по элементамъ какой либо строки, обращаются въ нуль. Въ этомъ случаѣ всякая прямая, проведенная въ плоскости (P) чрезъ O, будетъ осью эквивалентности, и если s не равна a, то плоскость (35) не проходитъ чрезъ начало O и разсматриваемая ось встрѣчаетъ эту плоскость въ нѣкоторой точкѣ A, по радіусу вектору которой $OA = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ опредѣлится угловое перемѣщеніе.

Разсмотримъ частный случай $s = a$. Тогда ур. (35) беретъ видъ

$$Lu_1 + Mu_2 + Nu_3 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

и принадлежитъ плоскости, проходящей чрезъ O. Такъ какъ опредѣлитель A равенъ нулю, то ур. (39) удовлетворяются величинами u_1, u_2, u_3, которыя вмѣстѣ не равны нулю. Означая вообще чрезъ A_{ki} производную опредѣлителя A относительно элемента строки k и столбца i, мы будемъ имѣть

$$u_1 : u_2 : u_3 = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

и уравненіе (40) требуетъ условія

$$A_{k1}L + A_{k2}M + A_{k3}N = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (42)$$

при каждомъ изъ значковъ $k = 1, 2, 3$.

Если это условіе не удовлетворено, то ур. (39) и (40) могутъ быть удовлетворены только величинами $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ при u_4 произвольнымъ; это даетъ $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, что не соотвѣтствуетъ ни какому перемѣщенію.

Если же опредѣлители A_{ki} не равны всѣ вмѣстѣ нулю и удовлетворяютъ условію (42), то ур. (39) и (40) принадлежатъ четыремъ плоскостямъ, пересѣкающимся по прямой (41). Эта прямая есть ось эквивалентности. А такъ какъ положеніе на ней точки A, опредѣляющей длину $OA = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ произвольно, то и угловое перемѣщеніе φ произвольно. Это значитъ, что *при непрерывномъ вращеніи тѣла около прямой* (41), *въ ту или другую сторону главный моментъ силъ неизмѣняется.*

По условію (42) главный моментъ $\overline{K}$ перпендикуляренъ къ прямой (42); поэтому можно въ двухъ какихъ нибудь точкахъ этой прямой приложить двѣ силы $\overline{P}$ и $\overline{Q}$, удовлетворяющія условіямъ

$$\overline{P} + \overline{Q} = \overline{R} \text{ и } \overline{MP} + \overline{MQ} = \overline{K}.$$

Такія двѣ силы будутъ эквивалентны данной системѣ силъ во все время вращенія тѣла около прямой (41).

Если точки приложенія силъ $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ укрѣплены неподвижно, то эти силы вызываютъ сопротивленія $-\overline{P}$ и $-\overline{Q}$, съ которыми онѣ уравновѣшиваются, а если силы $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ будутъ замѣнены данными силами, то послѣднія будутъ въ равновѣсіи съ тѣми же сопротивленіями во все время вращенія тѣла около прямой (41); слѣд. эта прямая имѣетъ свойство, сходное съ центромъ параллельныхъ силъ и центральною линіею. Мёбіусъ назвалъ такого рода оси вращенія *главными осями вращенія.*

Въ частномъ случаѣ, когда $L=0$, $M=0$, $N=0$, т. е. когда $K=0$, — система силъ приводится къ одной силѣ $\overline{R}$, приложенной къ точкѣ O. Тогда ур. (42) становится тожествомъ и прямая (41) будетъ опять *главною осью вращенія.*

Если точка O укрѣплена неподвижно, то равнодѣйствующая $\overline{R}$ или эквивалентная ей данная система силъ будетъ въ равновѣсіи съ сопротивленіемъ $-\overline{R}$ во все время вращенія тѣла около прямой (41).

Когда всѣ величины A_{ki} равны нулю, ур. (39) праводится къ одному, принадлежащему плоскости (P), проходящей чрезъ начало O, и если приэтомъ главный моментъ $\overline{K}$ не равенъ нулю, то плоскость (P) пересѣкаетъ плоскость (40) по прямой, которая есть главная ось вращенія. Въ случаѣ же $K=0$ всякая прямая въ плоскости (P) будетъ главною осью вращенія.

Наконецъ, когда всѣ элементы опредѣлителя A равны нулю, — мы будемъ имѣть $L=0$, $M=0$, $N=0$, $K=0$ и уравненія (39) и (40) не даютъ никакого условія для u_1, u_2, u_3, u_4, а потому всякая прямая, проходящая чрезъ O будетъ главною осью вращенія, т. е. при всякомъ вращеніи тѣла около O силы остаются въ равновѣсіи съ сопротивленіемъ въ этой точкѣ. Такое состояніе тѣла называется *астатическимъ*, а точка O есть центръ системы силъ.

93. Полагая, что ур. (42) не удовлетворено, а слѣд. что нѣтъ главныхъ осей вращенія для точки O, посмотримъ, нѣтъ ли другой точки, для которой существовали бы такія оси.

Означая чрезъ ξ, η, ζ координаты искомой точки относительно осей Ox, Oy, Oz, перенесемъ въ эту точку начало координатъ. Легко

видѣть, что ур. (35) и (36) при новомъ началѣ обращаются въ слѣдующія:

$$\left.\begin{array}{l}(L-\eta\Sigma Z+\zeta\Sigma Y)\lambda+(M-\zeta\Sigma X+\xi\Sigma Z)\mu+(N-\xi\Sigma Y+\eta\Sigma X)\nu=0\\(a_{11}-a+\eta\Sigma Y+\zeta\Sigma Z)\lambda+(a_{12}-\xi\Sigma Y)\mu+(a_{13}-\xi\Sigma Z)\nu=0\\(a_{21}-\eta\Sigma X)\lambda+(a_{22}-a+\xi\Sigma X+\zeta\Sigma Z)\mu+(a_{23}-\eta\Sigma Z)\nu=0\\(a_{31}-\xi\Sigma X)\lambda+(a_{32}-\zeta\Sigma Y)\mu+(a_{33}-a+\xi\Sigma X+\eta\Sigma Y)\nu=0\end{array}\right\}\ldots(43)$$

причемъ вмѣсто u_1, u_2, u_3 подставлены пропорціональныя имъ величины λ, μ, ν.

Положивъ

$$\mu\zeta-\nu\eta=p,\ \nu\xi-\lambda\zeta=q,\ \lambda\eta-\mu\xi=r\ldots\ldots(44)$$

можно представить ур. (43) подъ видомъ

$$\left.\begin{array}{l}L\lambda+M\mu+N\nu=p\Sigma X+q\Sigma Y+r\Sigma Z\\(a_{11}-a)\lambda+a_{12}\mu+a_{13}\nu+p\Sigma Y-q\Sigma Z=0\\a_{21}\lambda+(a_{22}-a)\mu+a_{23}\nu+p\Sigma Z-r\Sigma X=0\\a_{31}\lambda+a_{32}\mu+(a_{33}-a)\nu+q\Sigma X-p\Sigma Y=0\end{array}\right\}\ldots(45)$$

гдѣ шесть величинъ λ, μ, ν, p, q, r можно разсматривать какъ искомыя, при связывающемъ ихъ условіи

$$\lambda p+\mu q+\nu r=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(46)$$

Найдя эти величины, мы будемъ имѣть уравненія (44) для опредѣленія координатъ ξ, η, ζ искомой точки. Такъ такъ вслѣдствіе условія (34) одно изъ ур. (44) есть слѣдствіе двухъ прочихъ, то эти уравненія принадлежатъ прямой линіи и для точки (ξ, η, ζ) можно взять всякую точку этой прямой. Эта прямая составляетъ съ осями координатъ Ox, Oy, Oz, равно какъ и съ осями, имъ параллельными, перенесенными въ новое начало, углы, косинусы которыхъ суть: $\frac{\lambda}{\Omega}$, $\frac{\mu}{\Omega}$, $\frac{\nu}{\Omega}$,

т. е. тѣ самые, которые должны составлять съ осями координатъ главную ось вращенія, слѣд. прямая (44) есть главная ось вращенія относительно всякой ея точки.

Если главный векторъ силъ $\overline{R}$ не равенъ нулю, то система силъ имѣетъ опредѣленную центральную ось. Допустивъ это, возьмемъ начало координатъ O въ одной изъ точекъ центральной оси и ось положительныхъ координатъ a, по направленію этой оси въ одну сторону съ главнымъ векторомъ $\overline{R}$; тогда будемъ имѣть:

$$\Sigma X = R,\ \Sigma Y = 0,\ \Sigma Z = 0,\ M = 0,\ N = 0;$$

а потому ур. (45) приведется къ слѣдующимъ:

$$L\lambda = pR \qquad \ldots\ldots (47)$$

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - a)\lambda + a_{12}\mu + a_{13}\nu &= 0 \\ a_{21}\lambda + (a_{22} - a)\mu + a_{23}\nu - rR &= 0 \\ a_{31}\lambda + a_{32}\mu + (a_{33} - a)\nu + qR &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (48)$$

Изъ послѣднихъ трехъ выводимъ

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{R}{A}(A_{21}r - A_{31}q) \\ \mu &= \frac{R}{A}(A_{22}r - A_{32}q) \\ \nu &= \frac{R}{A}(A_{23}r - A_{33}q) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (49)$$

Подставивъ эти величины λ, μ, ν въ ур. (46) и (47), получимъ

$$p(A_{21}r - A_{31}q) + q(A_{22}r - A_{32}q) + r(A_{23}r - A_{33}q) = 0 \qquad \ldots (50)$$

$$p = \frac{L}{A}(A_{21}r - A_{31}q) \qquad \ldots\ldots (51)$$

Наконецъ, исключивъ p изъ этихъ двухъ уравненій, найдемъ однородное уравненіе 2-й степени относительно q и r:

$$\frac{L}{A}(A_{21}r - A_{31}q)^2 - A_{32}q^2 + (A_{22} - A_{33})qr + A_{23}r^2 = 0 \qquad \ldots (52)$$

которое даетъ для отношенія $\frac{q}{r}$ два вещественныя или мнимыя значенія. Въ первомъ случаѣ по этому отношенію мы можемъ опредѣлить двѣ системы вещественныхъ величинъ q и r, которыя означимъ чрезъ (q_1, r_1) и (q_2, r_2); потомъ помощію формулъ (49) и (51) мы найдемъ соотвѣтственныя значенія для λ, μ, ν, p. Означивъ эти значенія чрезъ $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1, p_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2, p_2)$, мы будемъ имѣть по формуламъ (44) уравненія главныхъ осей вращенія:

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1\zeta - \nu_1\eta = p_1,\ \nu_1\xi - \lambda_1\zeta = q_1,\ \lambda_1\eta - \mu_1\xi = r_1 \\ \mu_2\zeta - \nu_2\eta = p_2,\ \nu_2\xi - \lambda_2\zeta = q_2,\ \lambda_2\eta - \mu_2\xi = r_2 \end{array}\right\} \ldots (53)$$

Итакъ данная система силъ не можетъ имѣть болѣе двухъ главныхъ осей вращенія. Въ случаѣ равныхъ корней ур. (52), эти оси совпадаютъ въ одну, а въ случаѣ мнимыхъ корней — нѣтъ главныхъ осей вращенія.

Разсмотримъ нѣкоторые замѣчательные частные случаи.

a) Положимъ, что всѣ силы параллельны одной плоскости. Такъ какъ центральная ось должна быть также параллельна этой плоскости, то взявъ ее за ось Ox, можно взять плоскость xOy параллельно всѣмъ силамъ. Допустивъ это, мы будемъ имѣть: $Z = 0$, $Z' = 0, \ldots$; поэтому: $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{33} = 0$; кромѣ того $a_{31} = 0$ потому что $a_{31} - a_{13} = M = 0$. А проведя плоскость yOz чрезъ центръ проекцій всѣхъ силъ на прямыхъ параллельныхъ главному вектору $\overline{R}$, (т. е. чрезъ центральную точку въ центральной плоскости), мы будемъ имѣть $a_{11} = \Sigma xX = 0$. Слѣд. въ разсматриваемомъ случаѣ для опредѣлителя A получается выраженіе

$$A = \begin{vmatrix} -a_{22}, & a_{12}, & 0 \\ a_{12}, & 0, & 0 \\ 0, & a_{32}, & -a_{22} \end{vmatrix} = a_{12}^2 a_{22}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ находимъ:

$$A_{11} = 0,\ A_{12} = a_{12}a_{22},\ A_{13} = a_{12}a_{32}$$

$$A_{21} = a_{12}a_{22},\ A_{22} = a_{22}^2,\ A_{23} = a_{22}a_{32}$$

$$A_{31} = 0,\ A_{32} = 0,\ A_{33} = -a_{12}^2;$$

поэтому формулы (49), (51) и (52) приведутся къ слѣдующимъ:

$$\lambda = \frac{Rr}{a_{12}},\ \mu = \frac{Ra_{22}r}{a_{12}^2},\ \nu = \frac{R}{a_{12}^2 a_{22}}(a_{12}^2 q + a_{22}a_{32}r)$$

$$p = -\frac{a_{32}r}{a_{12}},\ (a_{12}^2 + a_{22}^2)qr = 0.$$

Послѣднее уравненіе имѣетъ два вещественныя рѣшенія: $r_1 = 0$, $q_2 = 0$, которымъ соотвѣтствуютъ величины:

$$\lambda_1 = 0,\ \mu_1 = 0,\ \nu_1 = \frac{R}{a_{22}}q_1,\ p_1 = 0$$

$$\lambda_2 = \frac{Rr_2}{a_{12}},\ \mu_2 = \frac{Ra_{22}r_2}{a_{12}^2},\ \nu_2 = \frac{Ra_{32}r_2}{a_{12}^2}$$

гдѣ q_1 и r_2 могутъ имѣть произвольныя вещественныя значенія. Отсюда слѣдуетъ, что *всякая система силъ параллельныхъ одной плоскости, главный векторъ которой не равенъ нулю, имѣетъ двѣ главныя оси вращенія.*

Формулы (53) даютъ слѣдующія уравненія для этихъ прямыхъ:

$$\eta = 0,\ \xi = \frac{a_{22}}{R} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

$$a_{22}\zeta - a_{32}\eta = -\frac{a_{12}a_{32}}{R},\ a_{32}\xi - a_{12}\zeta = 0,\ a_{12}\eta - a_{22}\xi = \frac{a_{12}^2}{R} \ldots (55)$$

по которымъ видно, что одна главная ось находится въ плоскости xOz, параллельна оси Oz и отстоитъ отъ нее на длину $\frac{a_{22}}{R}$, а другая проходитъ чрезъ точку $(O, \frac{a_{12}}{R}, O)$ (т. е. чрезъ центральную точку въ центральной плоскости), параллельна прямой, проведенной чрезъ начало O и чрезъ точку $\left(\frac{a_{12}}{R}, \frac{a_{22}}{R}, \frac{a_{32}}{R}\right)$, которая есть центръ параллельныхъ силъ, составленныхъ изъ проекцій данныхъ силъ на прямыхъ, параллельныхъ Oy, проведенныхъ чрезъ точки ихъ приложенія и силы R, приложенной къ точкѣ O и направленной по Oy; слѣд. она находится въ центральной плоскости и параллельна плечу пары,

составленной изъ равнодѣйствующей R силъ параллельныхъ оси Oy, приложенной къ центру этихъ силъ, и силы R, ей противоположной, приложенной къ точкѣ O. — Сверхъ того послѣднее изъ ур. (55) показываетъ, что проекція разсматриваемой прямой на плоскости xOy перпендикулярна къ прямой, проходящей чрезъ точки $\left(\frac{a_{22}}{R}, 0, 0...\right)$ и $(0, \frac{a_{12}}{R}, 0...)$. Изъ всего этого слѣдуетъ, что прямая (55) есть центральная линія разсматриваемой системы силъ.

Когда всѣ силы лежатъ въ плоскости xOy, тогда $z=0$, $z'=0$,..., а потому $a_{32}=0$ и ур. (55) приводятся къ слѣдующимъ

$$\zeta=0,\ a_{12}\eta-a_{22}\xi=\frac{a_{12}^2}{R},$$

очевидно принадлежащимъ центральной линіи силъ, лежащихъ въ одной плоскости. Точка $\left(\frac{a_{22}}{R}, O, O\right)$ есть центръ такой системы силъ.

Положимъ, что система силъ параллельныхъ плоскости xOy приводится только къ двумъ $\overline{F}$ и $\overline{F'}$. Тогда имѣемъ:

$$X+X'=R,\ Y+Y'=0,$$

$$a_{12}=(x-x')Y,\ a_{22}=(y-y')Y,\ a_{32}=(z-z')Y$$

и ур. (55) приведутся къ слѣдующимъ

$$(y-y')\zeta-(z-z')\left(\eta-\frac{a_{12}}{R}\right)=0$$

$$(z-z')\xi-(x-x')\zeta=0$$

$$(x-x')\left(\eta-\frac{a_{12}}{R}\right)-(y-y')\xi=0,$$

которыя очевидно принадлежатъ прямой, соединяющей точки приложенія силъ: (x, y, z) и (x', y', z').

b) Разсмотримъ еще случай, когда данныя силы приводятся къ одной $\overline{R}$. Тогда $L=0$, т. е. $a_{32}=a_{23}$; отъ этого равенство $a_{ki}=a_{ik}$ существуетъ для всѣхъ значковъ k и i, а слѣд. опредѣлитель A становится симметрическимъ и мы будемъ имѣть $A_{ki}=A_{ik}$ также для всѣхъ значковъ k и i. Формулы (51), (52) приводятся къ слѣдующимъ:

$$p=0,\ A_{23}q^2-(A_{22}-A_{33})qr-A_{23}r^2=0\ldots\ldots(56)$$

Послѣднее уравненіе даетъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{q_1}{r_1}&=\frac{A_{22}-A_{23}+\sqrt{(A_{22}-A_{33})^2+4A_{23}^2}}{2A_{23}}\\ \frac{q_2}{r_2}&=\frac{A_{22}-A_{33}-\sqrt{(A_{22}-A_{33}^2)+4A_{23}^2}}{2A_{23}}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(57)$$

слѣд. всякій разъ какъ система силъ имѣетъ одну равнодѣйствующую, — есть двѣ главныя оси вращенія.

Такъ какъ $p_1=0$ и $p_2=0$, то первыя два уравненія (53), принадлежащія проекціямъ этихъ прямыхъ на плоскости yOz, берутъ видъ

$$\mu_1\zeta-\nu_1\eta=0,\ \mu_2\zeta-\nu_2\eta=0$$

и показываютъ, что эти проекціи проходятъ чрезъ начало O, а для этого главныя оси вращенія должны пересѣкать ось Ox, т. е. ту прямую, по которой направлена равнодѣйствующая всѣхъ силъ. Сверхъ того условіе (46) даетъ

$$\mu_1q_1+\nu_1r_1=0,\quad \mu_2q_2+\nu_2r_2=0;$$

оттуда выводимъ

$$\frac{\nu_1}{\mu_1}\cdot\frac{\nu_2}{\mu_2}=\frac{q_1}{r_1}\cdot\frac{q_2}{r_2};$$

но по ур. (56) имѣемъ $\frac{q_1}{r_1}\cdot\frac{q_2}{r_2}=-1$; слѣд. $\frac{\nu_1}{\mu_1}\cdot\frac{\nu_2}{\mu_2}=-1$. А это значитъ, что *главныя оси вращенія находятся въ плоскостяхъ, проходящихъ чрезъ равнодѣйствующую и взаимно-перпендикулярныхъ.*

Если мы возьмемъ одну изъ этихъ плоскостей за xOy, а другую за xOz, то будемъ имѣть: $\nu_1=0$, $\mu_2=0$, $q_1=0$, $r_2=0$; для чего необходимо $A_{23}=0$. Тогда формулы (49) даютъ:

$$\lambda_1=\frac{R}{A}A_{21}r_1,\ \mu_1=\frac{R}{A}A_{22}r_1$$

$$\lambda_2=-\frac{R}{A}A_{31}q_2,\quad \nu_2=-\frac{R}{A}A_{33}q_2;$$

отъ этого по ур. (53) получимъ

$$\left.\begin{array}{l}\zeta = 0,\ A_{21}\eta - A_{22}\xi = \frac{A}{R}\\ \eta = 0,\ A_{31}\zeta - A_{33}\xi = \frac{A}{R}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(58)$$

Если же проведемъ плоскость yOz чрезъ центральную точку въ центральной плоскости, т. е. чрезъ центръ параллельныхъ силъ, составленныхъ изъ проекцій данныхъ силъ на прямыхъ, параллельныхъ равнодѣйствующей $\overline{R}$ и проведенныхъ чрезъ точки приложенія силъ, то будемъ имѣть $a_{11} = 0$, $a = a_{22} + a_{33}$

$$A = A_{21}a_{21} - A_{22}a_{33} = A_{31}a_{31} - A_{33}a_{22}$$

$$A_{21}a_{33} + A_{22}a_{32} = 0,\ A_{31}a_{21} + A_{33}a_{23} = 0;$$

поэтому ур. (58) могутъ быть приведены къ виду

$$\zeta = 0,\ a_{32}\left(\eta - \frac{a_{21}}{R}\right) + a_{13}\left(\xi - \frac{a_{33}}{R}\right) = 0$$

$$\eta = 0,\ a_{23}\left(\zeta - \frac{a_{31}}{R}\right) + a_{22}\left(\zeta - \frac{a_{22}}{R}\right) = 0.$$

Легко построить эти прямыя*).

Когда главный векторъ R равенъ нулю, тогда данныя силы или приводятся къ одной парѣ, или уравновѣшиваются. Въ этомъ случаѣ $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$, а потому координаты ξ, η, ζ исчезаютъ въ ур. (45); слѣд. эти уравненія приводятся къ ур. (35) и (36). Если послѣднія совмѣстны, то для каждой точки пространства (какъ мы видѣли въ § 92) существуетъ одна главная ось вращенія или безчисленное множество такихъ осей. Если же уравненія (35) и (36) не совмѣстны, то нѣтъ главныхъ осей ни въ какой точкѣ пространства.

Когда данныя силы приводятся къ парѣ, тогда главный моментъ $\overline{K}$ не равенъ нулю, и перпендикуляренъ къ главной оси вращенія какъ видно изъ ур. (35); поэтому можно взять на этой оси плечо такой пары, у которой моментъ есть $\overline{K}$ и которая, поэтому, остается

*) См. Lehrbuch der Statik. Möbius.

эквивалентна данной системѣ силъ при непрерывномъ вращенiи тѣла около главной оси.

Въ случаѣ $K = 0$ силы находятся въ равновѣсiи, которое не нарушится при вращенiи тѣла около главной оси. Всякую ось, имѣющую такое свойство Мёбiусъ называетъ *осью равновѣсiя*. Изъ вышесказаннаго видно, что для существованiя осей равновѣсiя, необходимо и достаточно, чтобы опредѣлитель

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} - a, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22} - a, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} - a \end{vmatrix}$$

былъ равенъ нулю.

94. Положимъ, что при $R = 0$ главный моментъ $\overline{K}$ не равенъ нулю, т. е. что силы приводятся къ парѣ, и отыщемъ такое перемѣщенiе тѣла, послѣ котораго силы придутъ въ равновѣсiе. Рѣшенiе этого вопроса выводится изъ формулъ § 92. Такъ какъ $\overline{K'} = 0$, то

$$\Delta L = -L,\ \Delta M = -M,\ \Delta N = -N;$$

отъ этого ур. (33) приведутся къ слѣдующимъ:

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}Lu_1 + \tfrac{1}{2}Mu_2 + \tfrac{1}{2}Nu_3 + (a - s)u_4 = 0 \\ &(a_{11} - s)u_1 + \tfrac{1}{2}(a_{12} + a_{21})u_2 + \tfrac{1}{2}(a_{13} + a_{31})u_3 + \tfrac{1}{2}Lu_4 = 0 \\ &\tfrac{1}{2}(a_{12} + a_{21})u_1 + (a_{22} - s)u_2 + \tfrac{1}{2}(a_{23} + a_{32})u_3 + \tfrac{1}{2}Mu_4 = 0 \\ &\tfrac{1}{2}(a_{31} + a_{13})u_1 + \tfrac{1}{2}(a_{23} + a_{32})u_2 + (a_{33} - s)u_3 + \tfrac{1}{2}Nu_4 = 0 \end{aligned}\right\}\ldots(59)$$

откуда, чрезъ исключенiе u_1, u_2, u_3, u_4, выводимъ ур. 4-й степени для опредѣленiя неизвѣстной s:

$$\begin{vmatrix} \tfrac{1}{2}L, & \tfrac{1}{2}M, & \tfrac{1}{2}N, & a - s \\ a_{11} - s, & \tfrac{1}{2}(a_{12} + a_{21}), & \tfrac{1}{2}(a_{13} + a_{31}), & \tfrac{1}{2}L \\ \tfrac{1}{2}(a_{12} + a_{21}), & a_{22} - s, & \tfrac{1}{2}(a_{23} + a_{32}), & \tfrac{1}{2}M \\ \tfrac{1}{2}(a_{13} + a_{31}), & \tfrac{1}{2}(a_{23} + a_{32}), & a_{33} - s, & \tfrac{1}{2}N \end{vmatrix} = 0 \ldots (60)$$

въ которомъ первая часть можетъ быть представлена подъ видомъ симметрическаго опредѣлителя, такъ:

$$\begin{vmatrix} s-a, & \frac{1}{2}L, & \frac{1}{2}M, & \frac{1}{2}N \\ \frac{1}{2}L, & s-a_{11}, & -\frac{1}{2}(a_{12}+a_{21}), & -\frac{1}{2}(a_{13}+a_{31}) \\ \frac{1}{2}M, & -\frac{1}{2}(a_{12}+a_{21}), & s-a_{22}, & -\frac{1}{2}(a_{23}+a_{32}) \\ \frac{1}{2}N, & -\frac{1}{2}(a_{13}+a_{31}), & -\frac{1}{2}(a_{23}+a_{32}), & s-a_{33} \end{vmatrix} = 0 \ldots (60)'$$

Всѣ четыре корня уравненія такого вида, какъ извѣстно, суть вещественные *), а потому вообще существуетъ четыре перемѣщенія тѣла, способныя привести данную систему силъ въ равновѣсіе. Между корнями ур. (60) могутъ быть равные, а потому число различныхъ перемѣщеній, удовлетворяющихъ вопросу, можетъ быть меньше четырехъ.

Приличнымъ выборомъ направленій осей координатъ Ox, Oy, Oz можно упростить ур. $(60)'$ и показать потомъ вещественность всѣхъ его корней.

Возьмемъ ось Ox по направленію главнаго момента $\overline{K}$; отъ этого мы будемъ имѣть:

$$M=0,\ N=0,\ \text{т. е. } a_{31}=a_{13},\ a_{21}=a_{12}.$$

Допустивъ это, можно взять направленія осей Oy и Oz такъ, что будетъ

$$a_{23}+a_{32}=0.$$

Въ самомъ дѣлѣ: допустивъ сперва, что прямоугольныя оси Oy и Oz имѣютъ какое ни есть направленіе въ плоскости перпендикулярной къ Ox, перемѣнимъ координаты y и z на другія y' и z' относительно

---

*) Это уравненіе подходитъ подъ видъ уравненія, служащаго для опредѣленія вѣковыхъ планетныхъ неравенствъ. Доказательство, что всѣ корни такого уравненія суть вещественныя, можно найти въ слѣдующихъ сочиненіяхъ: Cauchy, Exerc. de mathématiques, T. IV. Borchardt, Liouv. Journal, T. 12, 1-e série. Sylvester, Philos. Mag. 1852, 11 p. 138. Смотрите также теорію опредѣлителей Бріоски или Бальцера и мой мемуаръ: sur l'équation algébrique à l'aide de laquelle on détermine les oscillations très petites d'un système de points matériels.

новыхъ прямоугольныхъ осей Oy' и Oz'. Положивъ $\angle\, yOy' = \alpha$ и означая чрезъ Y' и Z' проекціи силы $\overline{F}$, приложенной къ точкѣ (x, y, z), на осяхъ Oy' и Oz', а чрезъ a'_{23} и a'_{32} значенія величинъ a_{23} и a_{32} послѣ перемѣны координатъ, мы будемъ имѣть:

$$y' = y \cos \alpha + z \sin \alpha, \quad z' = - y \sin \alpha + z \cos \alpha$$

$$Y' = Y \cos \alpha + Z \sin \alpha, \quad Z' = - Y \sin \alpha + Z \cos \alpha;$$

поэтому

$$a_{23}' = (a_{33} - a_{22}) \sin \alpha \cos \alpha + a_{23} \cos^2 \alpha - a_{32} \sin^2 \alpha,$$

$$a_{32}' = (a_{33} - a_{22}) \sin \alpha \cos \alpha - a_{23} \sin^2 \alpha + a_{32} \cos^2 \alpha,$$

$$a_{23}' + a_{32}' = (a_{33} - a_{22}) \sin 2\alpha + (a_{23} + a_{32}) \cos (2\alpha).$$

Положивъ $a_{23}' + a_{32}' = 0$, получимъ уравненіе

$$(a_{33} - a_{22}) \sin (2\alpha) + (a_{23} + a_{32}) \cos (2\alpha) = 0,$$

которое даетъ

$$\operatorname{tg} (2\alpha) = \frac{a_{23} + a_{32}}{a_{22} - a_{33}}.$$

По этой величинѣ для $\operatorname{tg} (2\alpha)$, всегда возможной, мы найдемъ для угла α два значенія, разность которыхъ есть $90°$. То и другое значеніе опредѣлитъ систему осей Oy', Oz', удовлетворяющихъ требуемому условію. Если же положимъ, что первоначальныя оси Oy и Oz совпадаютъ съ такою системою осей, то будемъ имѣть $a_{23} + a_{32} = 0$. Тогда ур. $(60)'$ беретъ видъ

$$\begin{vmatrix} s - a, \; a_{23}, \; 0, \; 0 \\ a_{23}, \; s - a_{11}, \; - a_{12}, \; - a_{13} \\ 0, \; - a_{12}, \; s - a_{22}, \; 0 \\ 0, \; - a_{13}, \; 0, \; s - a_{33} \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots\ldots (62)$$

т. е.

$$(s-a)(s-a_{11})(s-a_{22})(s-a_{33})$$
$$-(s-a)(s-a_{33})a_{12}^2-(s-a)(s-a_{22})a_{13}^2$$
$$-(s-a_{22})(s-a_{33})a_{23}^2=0\,\ldots\ldots\ldots(62)'$$

Множитель при $s-a$ въ этомъ уравненіи есть симметрическій опредѣлитель третьяго порядка

$$S'=\begin{vmatrix} s-a_{11}, & -a_{12}, & -a_{13} \\ -a_{12}, & s-a_{22}, & 0 \\ -a_{13}, & 0, & s-a_{33} \end{vmatrix};$$

приравнявъ его нулю, мы получимъ уравненіе

$$(s-a_{11})(s-a_{22})(s-a_{33})-(s-a_{33})a_{12}^2-(s-a_{22})a_{13}^2=0,$$

одного вида съ тѣмъ, которое встрѣчается въ аналитической геометріи при опредѣленіи главныхъ осей поверхностей втораго порядка. Это уравненіе имѣетъ одинъ корнь σ_1 между $-\infty$ и наименьшею изъ величинъ a_{22}, a_{33}; — другой корень σ_2 между a_{22} и a_{33} и третій корень σ_3 между наибольшею изъ этихъ двухъ величинъ и $+\infty$.

Подставивъ въ первую часть ур. (62)$'$ величины

$$-\infty,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ +\infty,$$

мы получимъ результаты съ слѣдующими знаками:

$$+\ -\ +\ -\ +;$$

изъ этого слѣдуетъ, что ур. (60) имѣетъ четыре вещественныхъ корня: s_1, s_2, s_3, s_4, расположенныхъ такъ:

$$-\infty<s_1<\sigma_1<s_2<\sigma_2<s_3<\sigma_3<s_4<+\infty.$$

Разсмотримъ частный случай, когда всѣ силы находятся въ одной плоскости yOz.

Тогда

$$a_{11}=0,\ a_{12}=0,\ a_{13}=0,\ a=a_{22}+a_{33}$$

и уравненія (59) и (62) приводятся къ слѣдующимъ:

$$\left.\begin{array}{c} a_{23}u_1 + (a_{22} + a_{33} - s)u_4 = 0 \\ -su_1 + a_{23}u_4 = 0 \\ (a_{22} - s)u_2 = 0 \\ (a_{33} - s)u_3 = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (63)$$

$$[(s - a_{22} - a_{33})s - a_{23}^2](s - a_{22})(s - a_{33}) = 0 \ldots (64)$$

Рѣшивъ послѣднее уравненіе, получимъ четыре его корня:

$$s_1 = \frac{a_{22} + a_{33}}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{a_{22} + a_{33}}{2}\right)^2 + a_{23}^2\right]}$$

$$s_2 = \frac{a_{22} + a_{33}}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{a_{22} + a_{33}}{2}\right)^2 + a_{23}^2\right]}$$

$$s_3 = a_{22},\ s_4 = a_{33}.$$

Положимъ сперва, что всѣ эти корни — неравные.

Взявъ для s одинъ изъ корней s_1, s_2, можно удовлетворить уравненіямъ (63), положивъ

$$u_2 = 0,\ u_3 = 0,\ u_1 : u_4 = a_{23} : s;$$

отъ этого получимъ

$$\mu = 0,\ \nu = 0,\ \lambda = \frac{a_{23}}{s}.$$

Эти величины опредѣляютъ ось перемѣщенія, направленную по оси координатъ Ox, и угловое перемѣщеніе φ по формулѣ

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \pm\lambda = \pm\frac{a_{23}}{s}$$

Означая чрезъ φ_1 и φ_2 угловыя перемѣщенія, соотвѣтствующія корнямъ s_1 и s_2, мы будемъ имѣть

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2} = -\frac{a_{23}^2}{s_1 s_2} = 1,$$

а потому $\varphi_2 = 180^\circ - \varphi_1$.

Взявъ $s = s_3 = a_{22}$ въ ур. (63), найдемъ, что

$$u_1 = 0,\ u_4 = 0,\ u_3 = 0$$

а u_2 остается произвольною величиною, которая однакожъ не должна быть равна нулю, если исключимъ тотъ случай, въ которомъ всѣ четыре величины u_1, u_2, u_3, u_4 равны нулю, не представляющій никакого удовлетворительнаго рѣшенія. Взявъ для u_2 какую либо величину неравную нулю, мы будемъ имѣть

$$\cos(\Omega x) = \frac{u_1}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)}} = 0$$

$$\cos(\Omega y) = \frac{u_2}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)}} = \pm 1$$

$$\cos(\Omega z) = \frac{u_3}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)}} = 0$$

Углы, соотвѣтствующіе этимъ косинусамъ, опредѣляютъ ось перемѣщенія $\overline{\Omega}$, направленную по оси координатъ Oy, въ сторону положительныхъ или отрицательныхъ y, смотря потому будетъ ли u_2 положительное или отрицательное. Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$\Omega = \sqrt{\left[\left(\frac{u_1}{u_4}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_4}\right)^2 + \left(\frac{u_3}{u_4}\right)^2\right]} = \infty;$$

слѣд. $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \infty$ и $\varphi = 180°$.

И такъ требуемое перемѣщеніе можетъ быть произведено вращеніемъ тѣла около оси Oy на $180°$.

Если возьмемъ $S = s_4 = a_{33}$, то найдемъ такимъ же образомъ, что требуемое перемѣщеніе можетъ быть произведено вращеніемъ тѣла около оси Oz на $180°$.

Причина, по которой вращеніе тѣла около оси Oy на $180°$ приводитъ силы въ равновѣсіе, объясняется слѣдующимъ образомъ:

Такое вращеніе равнозначитъ съ перемѣною направленій всѣхъ слагаемыхъ $Z, Z', \ldots$, параллельныхъ оси Oz, на противоположныя $-Z, -Z', \ldots$, при тѣхъ же слагаемыхъ $Y, Y', \ldots$ и при тѣхъ же точкахъ приложенія силъ; отъ такой перемѣны перемѣняются только знаки величинъ a_{23} и a_{33}, а потому условное уравненіе $a_{23} + a_{32} = 0$ перемѣняется въ $-a_{23} + a_{32} = 0$, или $\Sigma(yZ - zY) = 0$, выражающее условіе равновѣсія силъ.

Подобнымъ образомъ объясняется, почему вращеніе тѣла около оси Oz на 180° приводитъ силы въ равновѣсіе.

Разсмотримъ теперь случай, когда уравненіе (64) имѣетъ равные корни.

Равенство $s_1 = s_2$ требуетъ, чтобы $a_{22} + a_{33} = 0$ и $a_{23} = 0$; для чего необходимо $s_1 = 0$, $s_2 = 0$. Допустивъ это, можно удовлетворить уравненіямъ (63), положивъ $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ и взявъ произвольныя величины для u_1 и u_4. А это даетъ ось перемѣщенія, направленную по оси координатъ Ox, съ произвольнымъ угловымъ перемѣщеніемъ φ, такъ какъ $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \pm\frac{u_1}{u_4}$. Но въ слѣдствіе $a_{23} = 0$ силы находятся въ равновѣсіи, и такое равновѣсіе не нарушается при непрерывномъ вращеніи тѣла около оси Ox; поэтому прямая Ox есть ось равновѣсія.

Чтобы одинъ изъ корней s_1 или s_2 былъ равенъ s_3, должно быть удовлетворено условіе

$$a_{22}a_{33} + a_{23}^2 = 0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

а это даетъ

$$s_1 = a_{22} = s_3,\; s_2 = a_{33} = s_4.$$

Вслѣдствіе условія (65) первыя два уравненія (63) становятся тожественными и, при $s = a_{22}$, даютъ $u_1 : u_4 = a_{23} : a_{22}$; третье изъ ур. (63) даетъ произвольное значеніе для u_2, а четвертое требуетъ, чтобы $u_3 = 0$; поэтому можно взять для оси перемѣщенія произвольную прямую, проведенную чрезъ O въ плоскости xOy; при чемъ соотвѣтственное угловое перемѣщеніе опредѣлится помощію формулы

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\left(\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{a_{22}}\right)^2}.$$

При $s = a_{33}$ ур. (63) даютъ:

$$u_1 : u_4 = a_{23} : a_{33},\; u_2 = 0$$

и произвольное значеніе для u_3, а потому можно взять для оси перемѣщенія всякую прямую, проведенную чрезъ O въ плоскости yOz; причемъ соотвѣтственное угловое перемѣщеніе опредѣлится формулою

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\left(\frac{a_{23}}{a_{33}}\right)^2+\left(\frac{u_3}{a_{33}}\right)^2}.$$

Разсматриваемый случай представляется между прочимъ тогда, когда данная система есть пара силъ $\overline{F}$ и $-\overline{F}$, приложенныхъ къ точкамъ (x, y) и (x', y'), неизмѣняемо связанныхъ съ тѣломъ. Въ самомъ дѣлѣ, тогда

$$a_{22}=(y-y')Y,\ a_{33}=(z-z')Z,\ a_{23}=(y-y')Z,\ a_{32}=(z-z')Y;$$

а потому имѣемъ

$$a_{22}a_{33}=a_{23}a_{32},$$

что вслѣдствіе условія $a_{23}+a_{32}=0$, приводится къ ур. (65).

Условіе $a_{23}+a_{32}=0$, показываетъ, что для осей Oy и Oz должно взять прямыя, раздѣляющіе пополамъ углы, составляемые прямыми OA и OB, проведенными чрезъ O параллельно плечу пары и одной изъ силъ $(\overline{F}, -\overline{F})$; поэтому видно, что вращеніемъ около какой либо оси, проведенной чрезъ O въ плоскости xOy или xOz, можно совмѣстить прямую OA съ OB; послѣ чего пара силъ превратится въ двѣ силы равныя и прямо-противоположныя, т. е. въ двѣ силы, находящіяся въ равновѣсіи.

95. Полагая, что главный векторъ $\overline{R}$ не равенъ нулю, предложимъ себѣ вопросъ: *найти перемѣщеніе, послѣ котораго данная система силъ приводилась бы къ одной силѣ.*

Условіе вопроса выражается уравненіемъ

$$(L+\Delta L)\Sigma X+(M+\Delta M)\Sigma Y+(N+\Delta N)\Sigma Z=0,\ldots(66)$$

куда должно подставить вмѣсто ΔL, ΔM, ΔN ихъ выраженія (18). Такое уравненіе, будучи второй степени трехъ величинъ λ, μ, ν, представляющихъ координаты точки A, находящейся въ концѣ длины $\overline{\Omega}$, отложенной на оси перемѣщенія, принадлежитъ вообще поверхности 2-го порядка. Изъ этого видно, что вопросъ имѣетъ безчисленное множество рѣшеній. Всякая прямая, проведенная чрезъ точки O и встрѣчающая поверхность (66), можетъ быть взята за ось перемѣщенія, и радіусы векторы OA и OA' проведенные изъ O въ точки

встрѣчи этой прямой съ поверхностью (66) опредѣлятъ соотвѣтственныя угловыя перемѣщенія φ и φ' по формуламъ: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = OA$ и $\operatorname{tg}\frac{\varphi'}{2} = OA'$. Послѣ перемѣщенія, опредѣленнаго такимъ образомъ, силы приводятся къ одной $\overline{R}$, направленной по прямой, уравненія которой суть:

$$\left.\begin{aligned} y\Sigma Z - z\Sigma Y &= L + \Delta L \\ z\Sigma X - x\Sigma Z &= M + \Delta M \\ x\Sigma Y - y\Sigma X &= N + \Delta N \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (67)$$

гдѣ x, y, z означаютъ координаты какой нибудь точки этой прямой, а ΔL, ΔM, ΔN функціи координатъ λ, μ, ν принадлежащихъ точкѣ A или A'. Можно подчинить прямую условію, чтобы она проходила чрезъ данную точку (x, y, z), и найти помощію ур. (67) соотвѣтственныя величины λ, μ, ν, которыя опредѣлятъ соотвѣтственное перемѣщеніе тѣла.

Рѣшеніе разсматриваемаго вопроса можетъ быть упрощено на основаніи слѣдующихъ соображеній:

Вращеніе тѣла около какой либо оси OA на уголъ φ можетъ быть произведено двумя другими послѣдовательными перемѣщеніями: 1) вращеніемъ около другой оси $O'B$, параллельной съ OA, въ ту же сторону и съ такимъ угловымъ перемѣщеніемъ φ и 2) поступательнымъ перемѣщеніемъ, въ которомъ перемѣщенія всѣхъ точекъ тѣла геометрически равны и противоположны перемѣщенію какой либо точки прямой $O'B$ при данномъ вращеніи тѣла около OA, такъ что, если означимъ чрезъ h разстояніе между прямыми OA и $O'B$, то это общее поступательное перемѣщеніе должно быть равно $2h\sin\frac{\varphi}{2}$. Поступательное перемѣщеніе не измѣняетъ геометрически главнаго момента, поэтому главный моментъ силъ $\overline{K'}$ относительно O послѣ даннаго вращенія около OA будетъ тотъ, который будетъ имѣть силы относительно O послѣ вращенія тѣла около $O'B$.

Если (C) представляетъ центральную ось силъ послѣ вращенія около $O'B$, то послѣ добавочнаго поступательнаго перемѣщенія она

приметъ положеніе прямой (C'), представляющей центральную ось силъ послѣ даннаго вращенія около OA; но прямыя (C) и (C'), различающіяся положеніемъ въ пространствѣ имѣютъ одно и тоже положеніе въ тѣлѣ, т. е. относительно точекъ приложенія силъ; потому что отъ поступательнаго перемѣщенія прямая (C), неизмѣняемо-связанная съ тѣломъ, совпадаетъ съ (C'). Слѣд., при опредѣленіи положенія центральной оси въ самомъ тѣлѣ послѣ какого либо перемѣщенія, можно замѣнить это перемѣщеніе другимъ вращательнымъ около оси, проведенной чрезъ произвольную точку тѣла. На основаніи этого замѣчанія можно формулы, служащія для опредѣленія главнаго момента $\overline{K}'$, упростить приличнымъ выборомъ начала координатъ O.

Полагая, что главный векторъ $\overline{R}$ не равенъ нулю и что данныя силы имѣютъ центральную плоскость, возьмемъ за начало координатъ O центральную точку этой плоскости, т. е. центръ параллельныхъ силъ, представляющихъ проекцію данныхъ силъ на прямыхъ, проведенныхъ чрезъ ихъ точки приложенія параллельно главному вектору $\overline{R}$. Если при этомъ для оси Ox возьмемъ направленіе главнаго вектора $\overline{R}$, то будемъ имѣть:

$$a_{11} = 0,\ a_{21} = 0,\ a_{31} = 0.$$

Положимъ еще, что первоначальное положеніе тѣла таково, что центральная плоскость перпендикулярна къ главному вектору и что оси Oy и Oz взяты на пересѣченіяхъ этой плоскости съ средними плоскостями (см. § 87). Тогда мы будемъ имѣть:

$$a_{12} = 0,\ a_{13} = 0,\ a_{23} = 0,\ a_{32} = 0.$$

По доказанному въ § 88, если мы приложимъ къ точкѣ O двѣ силы $\overline{R}'$ и $-\overline{R}'$ по направленію оси Oy и двѣ силы $\overline{R}''$, $-\overline{R}''$ по направленію оси Rz, взявъ притомъ $R''=R'$, то получимъ три силы эквивалентныя данной системѣ силъ: 1) силу $\overline{R}-\overline{R}'-\overline{R}''$, приложенную къ точкѣ O, 2) силу, равную $\overline{R}'$, приложенную къ нѣкоторой точкѣ этой оси $O\,y$ и 3) силу, равную $\overline{R}''$, приложенную къ нѣкоторой точкѣ B оси Oz. Если положимъ $R' = R'' = R$ и означимъ чрезъ p и q значенія координатъ y и z для точекъ A и B, то будемъ имѣть

$$a_{22} = Rp,\ a_{33} = Rq$$

и по формуламъ (18):

$$\left.\begin{aligned} \Delta L &= \frac{2R}{h}\,[(q-p)\mu\nu - (q+p)\lambda] \\ \Delta M &= -\frac{2Rq}{h}(\nu\lambda + \mu) \\ \Delta N &= \frac{2Rp}{h}(\lambda\mu - \nu) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (68)$$

Помощію этихъ величинъ мы найдемъ главный моментъ $\overline{K}'$ который будутъ имѣть силы послѣ перемѣщенія, опредѣляемаго величинами λ, μ, ν. Уравненія (67) центральной оси приведутся къ слѣдующимъ:

$$zR = \Delta M,\ -yR = \Delta N \ldots\ldots\ldots\ldots (69)$$

На этой прямой должно отложить величину наименьшаго момента

$$K' \cos(K'R) = \Delta L.$$

Опредѣлимъ положеніе центральной оси въ самомъ тѣлѣ, т. е. положеніе прямой (69), относительно осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, представляющихъ то положеніе, которое примутъ послѣ перемѣщенія оси Ox, Oy, Oz, будучи центрально связаны съ тѣломъ.

Положивъ

$$\begin{aligned} &\cos(\xi x) = a_1,\ \cos(\eta x) = b_1,\ \cos(\zeta x) = c_1 \\ &\cos(\xi y) = a_2,\ \cos(\eta y) = b_2,\ \cos(\zeta y) = c_2 \\ &\cos(\xi z) = a_3,\ \cos(\zeta z) = b_3,\ \cos(\zeta z) = c_3 \end{aligned}$$

по формуламъ (9) § 171 Кинематики мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = \frac{1}{h}(1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2),\ b_1 = \frac{2}{h}(\lambda\mu-\nu),\ c_1 = \frac{2}{h}(\lambda\nu+\mu) \\ &a_2 = \frac{2}{h}(\lambda\mu+\nu),\ b_2 = \frac{1}{h}(1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2),\ c_2 = \frac{2}{h}(\mu\nu+\lambda) \\ &a_3 = \frac{2}{h}(\lambda\nu-\mu),\ b_3 = \frac{2}{h}(\mu\nu+\lambda),\ c_3 = \frac{1}{h}(1-\lambda^2-\mu^2+\nu^2) \end{aligned}\right\} \ldots (70)$$

а потому можно формулы (68) написать подъ видомъ

$$\left.\begin{aligned}\Delta L &= (qc_2 - pb_3)R\\ \Delta M &= -qRc_1\\ \Delta N &= pRb_1\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(71)$$

Если означимъ чрезъ ξ, η, ζ координаты какой нибудь точки, взятой на центральной оси, относительно осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ и положимъ

$$c_1\eta - b_1\zeta = l,\ a_1\zeta - c_1\xi = m,\ b_1\xi - a_1\eta = n\ldots\ldots(72)$$

то Rl, Rm, Rn будутъ проекціи на осяхъ $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ момента силы $\overline{R}$, направленной по центральной оси. А такъ какъ геометрическая сумма этого момента, съ наименьшимъ моментомъ всѣхъ силъ ΔL, составляетъ моментъ $\overline{K'}$ то

$$\left.\begin{aligned}Rl + a_1\Delta L &= K' \cos(K'\xi)\\ Rm + b_1\Delta L &= K' \cos(K'\eta)\\ Rn + c_1\Delta L &= K' \cos(K'\zeta)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(73)$$

Моментъ $\overline{K'}$ есть также геометрическая сумма моментовъ силъ $\overline{R_1'}$ и $\overline{R_1''}$, направленныхъ параллельно осямъ Oy и Oz и приложенныхъ къ точкамъ A и B, координаты которыхъ относительно осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ суть: (o, p, o), (o, o, q); поэтому

$$K' \cos(K'\xi) = R(pc_2 - qb_3)$$
$$K' \cos(K'\eta) = Rqa_3$$
$$K' \cos(K'\zeta) = -Rpa_2$$

Сравнивъ эти формулы съ формулами (73) и положивъ $\frac{\Delta L}{R} = k$, мы найдемъ, что

$$\left.\begin{aligned}l + a_1k &= pc_2 - qb_3\\ m + b_1k &= qa_3\\ n + c_1k &= -pa_2\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(74)$$

Отсюда получимъ искомыя уравненія центральной оси относительно координатныхъ осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, подставивъ вмѣсто l, m, n ихъ выраженія (72).

Сумма квадратовъ выраженій (74) даетъ

$$R^2(l^2+m^2+n^2)+\Delta L^2=K'^2;$$

съ другой стороны имѣемъ

$$K'^2=\Delta L^2+\Delta M^2+\Delta N;$$

слѣд.

$$R^2(l^2+m^2+n^2)=\Delta M^2+\Delta N^2.$$

Подставивъ сюда вмѣсто ΔM и ΔN ихъ выраженія (71), получимъ уравненіе

$$l^2+m^2+n^2=p^2b_1^{\,2}+q^2c_1^{\,2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(75)$$

связывающее величины: a_1, b_1, c_1, l, m, n, которыя можно разсматривать какъ лучевые координаты центральной оси. Такъ какъ оно 2-й степени относительно этихъ координатъ, то принвдлежитъ комплексу 2-го порядка. Слѣд. лучи этого комплекса представляютъ разныя положенія въ тѣлѣ, принимаемыя центральною осью силъ послѣ различныхъ перемѣщеній.

Можно подчинить центральную ось условію, чтобы она встрѣчала плоскость yOz въ данной точкѣ (y, z); тогда, зная координаты этой точки, мы найдемъ по формуламъ (69) соотвѣтственныя величины ΔM и ΔN, а величина ΔL наименьшаго момента, соотвѣтствующаго такой центральной оси, остается произвольною; поэтому каждому данному положенію центральной оси въ пространствѣ, соотвѣтствуетъ безчисленное множество перемѣщеній тѣла, опредѣляемыхъ величинами λ, μ, ν, удовлетворяющими двумъ уравненіямъ, которыя получимъ исключивъ ΔM и ΔN изъ ур. (69) и (68), а именно:

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2)z+2q(\nu\lambda+\mu)=0$$

$$(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)y+2p(\lambda\mu-\nu)=0.$$

Эти уравненія принадлежатъ пересѣченію двухъ поверхностей втораго порядка.

По даннымъ величинамъ y и z, мы помощію формулъ (69) и (71) получимъ величины $b_1 = -\frac{y}{p}$ и $c_1 = -\frac{z}{q}$ для косинусовъ угловъ ξOy и ξOz; потомъ будемъ имѣть

$$\cos(\xi Ox) = a_1 = \pm \sqrt{1 - b_1^2 - c_1^2}.$$

Такъ какъ b_1 и c_1 не могутъ быть больше единицы, то величины координатъ y и z не должны быть больше величинъ p и q. Помощію найденныхъ угловъ ξOx, ξOy и ξOz опредѣлится положеніе оси Ox относительно осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Такихъ положеній — два; одно OD, соотвѣтствующее величинамъ:

$$b_1,\ c_1 \text{ и } + \sqrt{1 - b_1^2 - c_1^2},$$

другое OD', соотвѣтствующее величинамъ:

$$b_1,\ c_1 \text{ и } - \sqrt{1 - b_1^2 - c_1^2}.$$

Всякое перемѣщеніе тѣла, отъ котораго прямая OD или OD' совпадаетъ съ осью Ox, т. е. съ главнымъ векторомъ $\overline{R}$, будетъ искомое. Ось такого перемѣщенія должна удовлетворять только условію, чтобы она составляла равные углы съ прямыми OD и Ox, или съ прямыми OD' и Ox; поэтому можно взять за ось искомаго перемѣщенія всякую прямую проходящую чрезъ O и находящуюся въ плоскости, перпендикулярной къ плоскости DOx и раздѣляющей пополамъ уголъ DOx, или находящуюся въ плоскости, перпендикулярной къ $D'Ox$ и раздѣляющей пополамъ уголъ $D'Ox$.

Подставивъ въ ур. (75) вмѣсто b_1 и c_1 ихъ величины: $-\frac{y}{p}$, $-\frac{z}{q}$ и положивъ $y^2 + z^2 = \rho^2$, мы получимъ уравненіе

$$l^2 + m^2 + n^2 = \rho^2, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (76)$$

въ которомъ можно разсматривать величины l, m, n какъ проекціи на осяхъ координатъ момента силы равной единицѣ и составляющей съ осями координатъ углы, опредѣляемые косинусами: a_1, b_1, c_1. Полученное уравненіе показываетъ, что величина этого момента есть данная длина ρ, представляющая разстояніе точки (y, z) отъ начала

координатъ; поэтому всѣ лучи комплекса (75), параллельные оси Ox, суть производящія круговаго цилиндра радіуса ρ. Слѣд. и эти производящія представляютъ различныя положенія разсматриваемой центральной оси, соотвѣтствующія различнымъ перемѣщеніямъ, въ которыхъ прямая OD или OD' совпадаетъ съ осью Ox.

Найдемъ еще положеніе въ тѣлѣ такой центральной оси, которая соотвѣтствовала бы данному значенію наименьшаго момента, т. е. данному значенію величины ΔL или отношенія $\frac{\Delta L}{R} = k$. Это новое условіе даетъ еще уравненіе между координатами центральной оси: a_1, b_1, c_1, l, m, n, которое получается слѣдующимъ образомъ:

Изъ уравненій

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \; a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$$

выводимъ

$$a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + c_1^2;$$

подставивъ сюда вмѣсто a_2 и a_3 ихъ величины

$$a_2 = -\frac{n + c_1 k}{p}, \; a_3 = \frac{m + b_1 k}{q}, \qquad (77)$$

выведенныя изъ уравненій (74) мы получимъ

$$\frac{(n + c_1 k)^2}{p^2} + \frac{(m + b_1 k)^2}{q^2} = b_1^2 + c_1^2, \qquad (78)$$

связывающія лучевыя координаты центральной оси. Оно 2-й степени относительно этихъ величинъ, а потому принадлежитъ комплексу 2-го порядка.

Уравненія (75) и (78), взятыя вмѣстѣ принадлежатъ конгруэнціи, составленной изъ лучей, общихъ двумъ комплексамъ второго порядка. Каждый лучь такой конгруэнціи представляетъ положеніе въ тѣлѣ, соотвѣтствующее данному наименьшему моменту ΔL.

Если подчинимъ еще ось условію, что она должна встрѣчать плоскость yOz въ данной точкѣ (y, z), то по предъидущему найдемъ по координатамъ этой точки три лучевыя координаты a_1, b_1, c_1, опредѣляющія направленія прямой OD или OD', представляющей поло-

женіе оси Ox относительно осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Послѣ того въ уравненіяхъ (75) и (78) остаются неопредѣленными только величины ξ, η, ζ, входящія въ l, m, n и такія уравненія принадлежатъ двумъ цилиндрамъ, съ производящими, параллельными прямой OD или OD'.

Эти цилиндры, будучи втораго порядка, вообще имѣютъ четыре общія производящія; каждая изъ нихъ можетъ быть взята за искомое положеніе центральной оси въ тѣлѣ, удовлетворяющей двумъ условіямъ: что она соотвѣтствуетъ данному значенію наименьшаго момента и встрѣчаетъ плоскость yOz въ данной точкѣ. Присоединивъ къ уравненіямъ (75) и (78) уравненіе

$$a_1 l + b_1 m + c_1 n = 0$$

и рѣшивъ эти три уравненія относительно неизвѣстныхъ лучевыхъ координатъ l, m, n, мы получимъ четыре рѣшенія, соотвѣтствующія разсматриваемымъ четыремъ положеніямъ центральной оси. Взявъ одно изъ этихъ рѣшеній, мы можемъ опредѣлить по формуламъ (77) соотвѣтственныя величины a_2 и a_3; первое изъ ур. (74) и первое изъ ур. (71) дадутъ соотвѣтственныя величины

$$c_2 = \frac{(l + a_1 k)p - qk}{p^2 - q^2},\quad b_3 = \frac{(l + a_1 k)q - pk}{q^2 - p^2}; \ldots\ldots\ldots (79)$$

потомъ изъ уравненій:

$$a_3 = b_1 c_2 - c_1 b_2,\quad b_1 = c_2 a_3 - a_2 c_3,$$

(см. Кинем. стр. 358, форм. (3)), выведемъ величины

$$b_2 = \frac{b_1 c_2 - a_3}{c_1},\quad c_3 = \frac{c_2 a_3 - b_1}{a_2}.$$

Зная такимъ образомъ косинусы всѣхъ угловъ, составляемыхъ осями $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, съ Ox, Oy, Oz, мы, по формуламъ стр. 362 Кинематики, найдемъ величины:

$$\lambda = \frac{b_3 - c_2}{a_1 + b_2 + c_3 + 1},\quad \mu = \frac{c_1 - a_3}{a_1 + b_2 + c_3 + 1},\quad \nu = \frac{a_2 - b_1}{a_1 + b_2 + c_3 + 1},$$

опредѣляющія ось перемѣщенія, соотвѣтствующаго разсматриваемому положенію центральной оси. Наконецъ по формулѣ

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{3-a_1-b_2-c_3}{a_1+b_2+c_3+1}}$$

мы получимъ соотвѣтственное угловое перемѣщеніе.

Если подчинимъ центральную ось, соотвѣтствующую данному значенію k, условію, что она должна проходить чрезъ данную точку тѣла (ξ, η, ζ), то для опредѣленія лучевыхъ координатъ a_1, b_1, c_1 этой прямой мы будемъ имѣть уравненіе

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=1$$

и два ур. (75) и (78), въ которыя должно подставить вмѣсто ξ, η, ζ координаты данной точки. Такъ какъ (75) и (78) суть уравненія второй степени относительно неизвѣстныхъ a_1, b_1, c_1, то онѣ принадлежатъ двумъ конусамъ 2-го порядка, имѣющимъ общую вершину въ O. Такіе конусы имѣютъ вообще четыре общія производящія; прямая, параллельная одной изъ этихъ производящихъ и проходящая чрезъ точку (ξ, η, ζ) представляетъ положеніе центральной оси, удовлетворяющей требуемымъ условіямъ. Уравненія (75) и (78) при данныхъ величинахъ ξ, η, ζ даютъ четыре системы величинъ для $\frac{b_1}{a_1}$ и $\frac{c_1}{a_1}$, и каждой системѣ этихъ отношеній, въ слѣдствіе ур.

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=1,$$

соотвѣтствуютъ двѣ величины, равныя a_1 съ противоположными знаками, а послѣднимъ величинамъ соотвѣтствуютъ величины b_1 и c_1, также равныя и съ противоположными знаками; отъ этого системѣ величинъ a_1, b_1, c_1, удовлетворяющей ур. (75) и (78) соотвѣтствуетъ система $-a_1$, $-b_1$, $-c_1$ также имъ удовлетворяющая; но обѣ системы опредѣляютъ положеніе одной только прямой; слѣд. достаточно разсматривать только четыре системы значеній a_1, b_1, c_1, удовлетворяющихъ ур. (75) и (78). Опредѣливъ a_1, b_1, c_1 мы найдемъ по формуламъ (72) остальныя лучевыя координаты l, m, n искомой прямой.

Послѣ этого, какъ въ предъидущемъ случаѣ, мы найдемъ всѣ косинусы угловъ, составляемыхъ осями $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ съ Ox, Oy, Oz, и величины λ, μ, ν, опредѣляющія перемѣщеніе, соотвѣтствующее разсматриваемой центральной оси.

Уравненія конгруэнціи (75) и (78) могутъ быть замѣнены двумя другими слѣдующимъ образомъ:

Изъ уравненій, связывающихъ косинусы угловъ, составляемыхъ осями $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ съ Ox, Oy, Oz, легко получить уравненія:

$$a_3^2 + b_3^2 - c_2^2 = c_1^2,\ c_3^2 - b_3^2 + a_2^2 = b_1^2;$$

подставивъ въ нихъ вмѣсто a_2, a_3, c_2, b_3 ихъ выраженія (77) и (79), мы получимъ уравненія, связывающія только величины: a_1, b_1, c_1, l, m, n, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \frac{(m + b_1 k)^2}{q^2} + \frac{(l + a_1 k)^2 - k^2}{q^2 - p^2} = c_1^2 \\ \frac{(n + c_1 k)^2}{p^2} + \frac{(l + a_1 k)^2 - k^2}{p^2 - q^2} = b_1^2 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (80)$$

Эти уравненія однозначущи съ уравненіями (75) и (78); потому что отъ сложенія ихъ получается ур. (78), а сумма произведеній ихъ на q^2 и p^2 даетъ ур. (75); слѣд. центральная ось, соотвѣтствующая данному значенію наименьшаго главнаго момента $\Delta L = Rk$ есть лучь конгруэнціи (80).

Разсмотримъ частный случай $k = 0$, т. е. предложимъ себѣ найти такое перемѣщеніе тѣла, послѣ котораго всѣ силы приводились бы къ одной равнодѣйствующей, и опредѣлить положеніе въ тѣлѣ прямой, по которой должна быть направлена эта сила.

Положивъ въ ур. (80) $k = 0$ получимъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{m^2}{q^2} + \frac{l^2}{q^2 - p^2} = c_1^2 \\ \frac{n^2}{p^2} + \frac{l^2}{p^2 - q^2} = b_1^2 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (81)$$

Лучи этой конгруенціи представляютъ въ тѣлѣ различныя положенія равнодѣйствующей, соотвѣтствующія различнымъ перемѣщеніямъ, послѣ которыхъ силы становятся эквивалентны одной силѣ. Миндингъ показалъ, что всѣ эти прямыя опираются на двухъ кривыхъ, неизмѣняемо связанныхъ съ тѣломъ, лежащихъ въ плоскостяхъ $\eta O \xi$ и $\zeta O \xi$, а именно: на эллипсисѣ и гиперболѣ, имѣющихъ центръ въ O и глав-

нымъ діаметромъ ось $O\xi$, на которой расположены фокусы обѣихъ кривыхъ такъ, что фокусы одной изъ кривыхъ служатъ вершинами другой.

Для доказательства этой замѣчательной теоремы разсмотримъ слѣды лучей конгруэнціи (81) на плоскостяхъ $\eta O\xi$ и $\zeta O\xi$. Слѣды на первой изъ этихъ плоскостей удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$\zeta = 0, \left(\frac{\xi^2}{q^2} + \frac{\eta^2}{q^2 - p^2} - 1\right)c_1^2 = 0 \ldots\ldots\ldots (82)$$

а слѣды на второй — уравненіямъ:

$$\eta = 0, \left(\frac{\xi^2}{p^2} + \frac{\zeta^2}{p^2 - q^2} - 1\right)b_1^2 = 0 \ldots\ldots\ldots (83)$$

Если c_1 и b_1 не равны нулю, т. е. если разсматриваемый лучь не параллеленъ ни плоскости $\eta O\xi$ ни плоскости $\zeta O\xi$ и не лежитъ ни въ одной изъ нихъ, то мы должны имѣть

$$\frac{\xi^2}{q^2} + \frac{\eta^2}{q^2 - p^2} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (84)$$

$$\frac{\xi^2}{p^2} + \frac{\zeta^2}{p^2 - q^2} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (85)$$

Эти уравненія принадлежатъ двумъ линіямъ 2-го порядка, имѣющимъ центръ въ O и главнымъ діаметромъ ось $O\xi$.

При $p > q$ кривая (84) есть гипербола съ эксцентриситетомъ p, а кривая (85) — эллипсисъ съ главною осью $2p$. Если же $q > p$, (84) есть эллипсъ съ большою осью $2q$, а (85) — гипербола съ эксцентриситетомъ q; слѣд. въ томъ и другомъ случаѣ вершины одной изъ кривыхъ находятся въ фокусахъ другой.

Для луча, параллельнаго плоскости $\eta O\xi$ или лежащаго въ этой плоскости, мы будемъ имѣть $c_1 = 0$ и по первому изъ ур. (81),

$$\left(\frac{a_1^2}{q^2} + \frac{b_1^2}{q^2 - p^2}\right)\zeta^2 = 0.$$

Можно удовлетворить этому уравненію, положивъ

$$\frac{a_1^2}{q^2} + \frac{b_1^2}{q^2 - p^2} = 0 \text{ или } \zeta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (86)$$

Въ случаѣ $q > p$ первое предположеніе невозможно; слѣд. необходимо $\zeta = 0$, т. е. лучь долженъ лежать въ плоскости $\eta O \xi$. Такой лучь встрѣчаетъ гиперболу (85) въ точкѣ $\zeta = 0$, $\xi = \pm p$, т. е. въ одной изъ вершинъ этой кривой. А такъ какъ эта точка есть фокусъ эллипса (84) и слѣд. находится внутри этой кривой, то разсматриваемый лучь долженъ пересѣкать эту кривую; слѣд. онъ опирается на обѣихъ кривыхъ (84) и (85). Въ случаѣ же $p > q$ можно допустить первое изъ уравненій (86) при величинѣ ζ, неравной нулю. Это даетъ лучь, параллельный ассимитотѣ гиперболы (84), т. е. пересѣкающій эту кривую въ безконечности. Такъ какъ b_1 неравно нулю, то ур. (83) приводится къ ур. (85), а потому лучь долженъ пересѣкать эллипсъ (85).

Также найдемъ, что лучь для котораго $b_1 = 0$ находится въ плоскости $\zeta O \xi$ или параллеленъ ассимтотѣ гиперболы (85). Наконецъ когда $b_1 = 0$ и $c_1 = 0$, лучь совпадаетъ съ осью $O\xi$. Изъ этого видно, что всѣ лучи конгруэнціи (81), безъ исключенія, опираются на двухъ кривыхъ (84) и (85); слѣд. эти кривыя служатъ директриссами конгруэнціи.

Нѣкоторыя другія изслѣдованія, относящіяся къ разсматриваемому въ этой главѣ предмету можно найти въ слѣдующихъ сочиненіяхъ:

Möbius. Lehrbuch der Statik.

Minding. Journal für reine und angewandte Mathematik von Crelle B. 14 и 15.

Moigno. Leçons de Mécanique analytique. Statique.

ОГЛАВЛЕНІЕ

КО ВТОРОЙ ЧАСТИ РАЦІОНАЛЬНОЙ МЕХАНИКИ.

ВВЕДЕНІЕ ВЪ СТАТИКУ И ДИНАМИКУ.

СТРАН.

СТАТИКА.